УДК 66.061.14

ПРОВЕРКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗМЕРЕННОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА БЛИЗОСТЬ К НОРМАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

Монастырский Л.М.

ГОУ ВПО «Южный федеральный университет», Ростов-на-Дону, e-mail: info@sfedu.ru

Часто проведение реального физического эксперимента невозможно в связи с его сложностью по технологическим, каким-либо практическим или экономическим правилам. Иногда возможность реального эксперимента ограничена уровнем развития знаний, техники и технологии, а иногда он невозможен по принципиальным соображениям. В таких случаях имеет смысл проводить виртуальные физические эксперименты, но при этом возникают определенные проблемы с выбором виртуальных результатов эксперимента. Всё это накладывает определенные ограничения на реальный эксперимент. Рассмотрен вопрос о близости экспериментального распределения измеряемой физической величины к нормальному распределению. Проведена оценка близости экспериментального распределения результатов определений сопротивления набора одинаковых по номиналу резисторов к нормальному на основе χ^2-критерия. Вычислены коэффициенты асимметрии и эксцесса для распределения результатов определения сопротивления резисторов. Полученные результаты показали, что отличие экспериментального распределения результатов определения сопротивления резисторов от нормального незначимо.

Ключевые слова: распределение, сопротивление, критерий, коэффициенты асимметрии

VALIDATION OF THE EXPERIMENTAL DISTRIBUTION MEASURED PHYSICAL QUANTITY CLOSE TO THE NORMAL DISTRIBUTION

Monastyrskiy L.M.

Southern federal University, Rostov-on-Don, e-mail: e-mail: info@sfedu.ru

Often the real physical experiment is impossible in connection with its technological complexity, any practical or economic rules. Sometimes the possibility of a real experiment is limited by the level of development of knowledge, techniques and technology, and sometimes it is not possible for reasons of principle. In such cases it makes sense to carry out virtual physical experiments, but there are certain problems with the selection of the virtual experiment results. All this imposes certain restrictions on a real experiment. Consider the proximity of the experimental distribution of measured physical quantities to a normal distribution. The estimation of the proximity of the experimental distribution of the results of definitions of resistance set the same value of the resistors to the normal on the basis of χ2-test. The calculated skewness and kurtosis for the distribution of the results of determination of resistance of resistors. The results showed that the difference between the experimental distribution of the results to determine the resistance of the resistors from the normal insignificant.

Keywords: distribution, resistance, criterion, coefficients of asymmetry

Физика – наука экспериментальная. Типичным для физического научного метода является стремление количественно описать исследуемые объекты и процессы. Обычно, когда говорят об эксперименте, подразумевают реальное изучение явления при его воспроизведении в строго контролируемых условиях, чему и учат студентов в процессе выполнения лабораторных работ. Однако существуют ситуации, в которых сложно, а иногда невозможно подтвердить те или иные закономерности экспериментально. Часто проведение реального физического эксперимента невозможно в связи с его сложностью по технологическим, каким-либо практическим или экономическим правилам. Иногда возможность реального эксперимента ограничена уровнем развития знаний, техники и технологии, а иногда он невозможен по принципиальным соображениям [5]. Всё это накладывает определенные ограничения на реальный эксперимент.

В таких случаях имеет смысл проводить виртуальные физические эксперименты, но при этом возникают определенные проблемы с выбором виртуальных результатов эксперимента.

В физических исследованиях, особенно в ядерной физике, приходится иметь дело со случайными величинами, распределёнными по закону Пуассона [1, 3]. Нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса) играет исключительно важную роль и занимает среди законов распределения особое положение. Главная особенность, выделяющая нормальный закон, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся условиях.

Можно доказать, что сумма большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону, и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Большинство встречающихся на практике случайных величин, таких, например, как ошибки стрельбы, ошибки измерений и т.д., могут быть представлены как суммы весьма большого числа сравнительно малых слагаемых – элементарных ошибок, каждая из которых вызвана действием отдельной причины, не зависящей от остальных. Каким бы законам не были подчинены отдельные элементарные ошибки, особенности этих распределений в сумме большого числа слагаемых нивелируются, и сумма оказывается подчиненной закону, близкому к нормальному.

Основное ограничение, накладываемое на суммируемые ошибки, состоит в том, чтобы все они играли в общей сумме относительно малую роль. Если одна из ошибок по своему влиянию на сумму резко превалирует над всеми другими, то закон распределения этой превалирующей ошибки наложит свое влияние на сумму и определит в основных чертах ее закон распределения [2].

В реальной практической работе приходится иметь дело с результатами измерений, которые в той или иной степени отклоняются от нормального распределения. Поэтому при статистическом анализе нового экспериментального материала нередко возникает необходимость оценить степень близости экспериментально наблюдаемого распределения к нормальному распределению.

С другой стороны, априори, считается [3, 5], что случайные ошибки реальных физических измерений должны подчиняться нормальному закону распределения. При этом распределение Гаусса или нормальное распределение, описывает предельное распределение результатов любого измерения, подверженного *большому* числу небольших случайных ошибок. В реальных физических экспериментах, особенно в рамках лабораторных работ физического практикума в вузах, как правило, имеют дело с небольшим количеством измерений. Если это так, то для дальнейшей обработки результатов таких измерений можно использовать статистические методы. Распределение результатов таких измерений можно представить графически на гистограмме для дискретных величин, огибающая которой в пределе (при неограниченном количестве измерений) стремится к распределению Гаусса. Как правило, после примерно 70–100 измерений на гистограмме вырисовывается единственный пик и она становится более симметричной. Следует подчеркнуть, что предельное распределение – это теоретическая идеализация, к которой никогда нельзя абсолютно точно приблизиться в реальном эксперименте.

При современном уровне развития электронно-вычислительной техники получило широкое распространение использование электронных тренажёров, имитирующих лабораторный эксперимент. Для получения квазиэкспериментальных значений измеряемой величины разработчиками используется генератор случайных чисел, соответствующих нормальному распределению. В связи с этим возникает вопрос о близости экспериментального распределения измеряемой физической величины к нормальному распределению при некотором, не очень большом, количестве измерений. Тем не менее имеются надежные предпосылки, что почти для всех измерений существует предельное распределение, к которому гистограмма все более приближается по мере того, как возрастает количество измерений.

Заметим, что для целей применения случайных чисел, полученных с помощью генератора случайных чисел, необходимы определенные требования к этим генераторам. Самое главное, что эти сгенерированные числа должны подчиняться определенным законам. Предполагается, что плотность вероятности случайных факторов подчиняется какому-либо закону. В частности, что ошибка измерения электрических и неэлектрических величин электрическими способами подчиняется нормальному закону, в задачах теории надежности используется распределение Вейбулла (интенсивность отказа), логнормальное распределение характерно для многих физических и социально-экономических ситуаций (размер и вес частиц, образующихся при дроблении; заработная плата работника; размеры космических образований; долговечность изделия, работающего в режиме износа и старения, и др.).

Для того чтобы сгенерировать множество случайных точек, свойства которых подчиняются одному из известных законов распределения, необходимо задать закон распределения и его параметры, количественно характеризующие случайную величину, такие как математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, мода и др., и определить количество случайных точек.

Необходимо проверить, что полученная выборка чисел действительно имеет требуемый закон распределения и обладает нужными характеристиками, для чего по этой выборке строится гистограмма распределения, которая сравнивается с заказанной функцией плотности.

Последовательности случайных чисел, формируемых тем или иным ГСЧ, должны удовлетворять ряду требований. Во-первых, числа должны выбираться из определенного множества (чаще всего это действительные числа в интервале от 0 до 1 либо целые от 0 до N). Во-вторых, последовательность должна подчиняться определенному распределению на заданном множестве (чаще всего распределение равномерное). Необязательным является требование воспроизводимости последовательности. Если ГСЧ позволяет воспроизвести заново однажды сформированную последовательность, отладка программ с использованием такого ГСЧ значительно упрощается. Кроме того, требование воспроизводимости часто выдвигается при использовании ГСЧ в криптографии. Поскольку псевдослучайные числа не являются действительно случайными, качество ГСЧ очень часто оценивается по «случайности» получаемых чисел. В эту оценку могут входить различные показатели, например, длина цикла (количество итераций, после которого ГСЧ зацикливается), взаимозависимости между соседними числами (могут выявляться с помощью различных методов теории вероятностей и математической статистики) и т.п. Подробнее оценка качества ГСЧ рассмотрена ниже.

Качество ГСЧ в значительной мере влияет на результаты работы программ, использующих случайные числа. Поэтому все применяемые генераторы случайных чисел должны пройти перед моделированием системы предварительное тестирование, которое представляет собой комплекс проверок по различным стохастическим критериям, включая в качестве основных тесты на равномерность, стохастичность и независимость (рассматриваются только ГСЧ с равномерным распределением).

Проверка равномерности последовательностей псевдослучайных равномерно распределенных чисел $\{x_i\}$ может быть выполнена по гистограмме с присваиванием косвенных признаков.

Задачей обработки совместных измерений является построение аналитической зависимости по имеющимся совместным измерениям двух (или нескольких) величин. В общем случае структура зависимости $y = f(x)$ заранее неизвестна и определяется исходя из имеющихся экспериментальных данных. В ряде случаев предполагаемый вид функциональной зависимости $y = f(x)$ известен заранее на основании каких-либо теоретических соображений, и неизвестны лишь параметры этой зависимости.

На плоскости xOy каждая пара совместно измеренных значений (xi, yi) определяет положение некоторой точки. Величины xi и yi не свободны от погрешностей, поэтому определяемые ими точки не лежат точно на какой-то кривой, а образуют некоторое облако с нечеткими границами. Подлежащая определению функциональная зависимость $y = f(x)$ описывает некоторую кривую, называемую *регрессионной кривой*, проходящую через область, заполненную точками (xi, yi). В основу выбора вида кривой $y = f(x)$ могут быть положены различные факторы: вид облака точек и имеющаяся информация о связи величин x и y, а также соображения удобства использования полученной кривой в дальнейшем.

Сопоставление полученных в результате решения этих задач экспериментальной зависимости и конкретизированной теоретической кривой позволяет сделать вывод о справедливости положений данной теории. Таким образом, просто найти параметры теоретической кривой, наилучшим образом соответствующие эксперименту, не достаточно. Для подтверждения справедливости теории необходимо также, чтобы совпадали основные качественные особенности поведения этих кривых.

Оценка близости экспериментального распределения измеряемой физической величины к нормальному распределению проводилась для результатов измерений сопротивлений набора одинаковых по номиналу резисторов.

В работе использовался набор резисторов (100 штук). Сопротивление резисторов измерялось с помощью универсального цифрового вольтметра В7-23. Производство резисторов на заводе – сложный технологический процесс. В результате величина сопротивления резисторов может отличаться от номинала, указанного на каждом экземпляре. Это связано с технологическими погрешностями при изготовлении резисторов. В данной работе для измерения сопротивления используется измерительный прибор, который обеспечивает точность до сотых долей процента относительной погрешности. Таким образом, погрешностью измерений, связанной с измерительным прибором, можно пренебречь по сравнению с отклонениями, полученными в технологическом процессе изготовления резисторов. Результат измерения сопротивлений резисторов приведён в табл. 1.

Таблица 1

Результат измерения сопротивлений ста резисторов

473,4	484,0	485,4	486,6	488,3
480,3	484,2	485,6	486,6	488,3
480,9	484,3	485,6	486,6	488,4
481,1	484,5	485,6	486,7	488,5
481,7	484,5	485,6	486,7	488,5
481,8	484,5	485,7	486,8	488,6
482,0	484,5	485,8	486,9	488,7
482,6	484,5	485,9	486,9	488,7
482,8	484,7	485,9	487,0	488,7
482,9	484,7	486,0	487,1	489,2
483,0	484,7	486,0	487,2	489,5
483,3	484,8	486,1	487,2	489,6
483,4	484,9	486,1	487,5	490,2
483,4	485,0	486,1	487,5	490,2
483,5	485,0	486,4	487,5	490,3
483,5	485,0	486,4	487,8	490,3
483,5	485,2	486,4	487,8	490,6

Оценка степени близости распределения результатов измерений сопротивления набора резисторов к нормальномураспределению проводилась на основе χ^2-критерия [4]. Этот критерий служит показателем того, насколько хорошо согласуются наблюдаемые и ожидаемые распределения. Число χ^2 определяется следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A_k - E_k)^2}{E_k}.$$

Здесь A_k – наблюдаемое число, E_k – ожидаемое число.

Ясно, что это число χ^2 служит показателем того, насколько хорошо согласуются наблюдаемое и ожидаемое распределения. Если $\chi^2 = 0$, то согласие иджеальное, т.е. $A_k = E_k$ для всех интервалов измеренной величины, что маловероятно. В общем случае отдельные члены в сумме χ^2должны быть порядка 12, а в сумме всего n членов. Если

$$\chi^2 \langle\langle \; n$$

(χ^2порядка n или больше), то наблюдаемое и ожидаемое распределения согласуются достаточно хорошо. С другой стороны, если

$$\chi^2 \rangle\rangle \; n$$

(χ^2 значительно больше количества интервалов), то наблюдаемые и ожидаемые числа значительно различаются и есть все основания подозревать, что результаты наших измерений не распределены в соответствии с ожидаемым законом.

Для данного набора резисторов рассчитывались среднее арифметическое $\overline{x} = 485{,}9$ Ом и выборочная дисперисия $S^2 = 7{,}3417$ Ом^2. Все величины приведены в обозначениях работы [1]. Весь диапазон изменения сопротивлений набора резисторов разбивался на десять интервалов шириной $d = 2$ Ом. Принималось, что верхняя граница интервала не принадлежит ему, и подсчитывалось число попавших в него результатов (табл. 2).

Как видно из табл. 2, первые пять интервалов и последние два необходимо объединить, для выполнения условия $n_j > 5$, поэтому конечное число интервалов составляет $k = 5$.

Сравнив полученное значение χ^2-критерия с табличным значением $\chi^2 = 2{,}9066 < \chi^2(\alpha = 0{,}05, f = k - 3 = 2) = 5{,}99$, получили, что распределение подчиняется нормальному закону.

Таблица 2

Обработка результатов определения сопротивлений набора резисторов для расчета χ^2-критерия

класс	Интервал $x_j \div x_{j+1}$	n_j	Интервал $u_j \div u_{j+1}$	$\Phi(u_j)$	$\Phi(u_{j+1})$	p_j	Np_j	$\frac{(n_j - Np_j)^2}{Np_j}$
1	473,4–475,4	1	– ∞÷– 0,94 ($n_1 = 12$)	– 0,5	– 0,3264	0,1736	17,4	1,6758
	475,4–477,4	0						
	477,4–479,4	0						
	479,4–481,4	3						
	481,4–483,4	8						
2	484,4–485,4	26	– 0,94÷– 0,20	– 0,3264	– 0,0793	0,2471	24,7	0,0684
3	485,4–487,4	34	– 0,20÷0,54	– 0,0793	0,2054	0,2847	28,5	1,0614
4	487,4–489,4	18	0,54÷1,28	0,2054	0,3997	0,1943	19,4	0,1010
5	489,4–491,4	9	1,28÷∞ ($n_5 = 10$)	0,3997	0,5	0,1003	10,0	0
	491,4–493,4	1						

Таблица 3

Расчёт коэффициентов асимметрии и эксцесса для распределения результатов определения сопротивления резисторов

класс	Интервал $x_j \div x_{j+1}$	$\overline{x}_j$	n_j	$\Delta x_j = \overline{x}_j - \overline{x}$	$n_j\left(\Delta x_j\right)^3$	$n_j\left(\Delta x_j\right)^4$
1	479,4–481,4	480,4	3	– 5,5	– 499,125	2745,1875
2	481,4–483,4	482,4	8	– 3,5	– 343	1200,5
3	484,4–485,4	484,4	26	– 1,5	– 87,75	131,625
4	485,4–487,4	486,4	34	0,5	4,25	2,125
5	487,4–489,4	488,4	18	2,5	281,25	703,125
6	489,4–491,4	490,4	9	4,5	820,125	3690,5625
7	491,4–493,4	492,4	1	6,5	274,625	1785,0625
Суммы					450,375	10258,1875
$As = 0{,}326 < As(0{,}05,\ 100) = 0{,}385$, $b_2(0{,}95,\ 100) = 2{,}35 < 3{,}085 < b_2(0{,}05,\ 100) = 3{,}77$. $Ek = -0{,}65$						

Определение отклонения распределения случайной величины x от нормального можно оценить с помощью коэффициентов асимметрии As и Ek, которые при строго нормальном распределении равны нулю. Если величина $As > 0$, распределение имеет положительную асимметрию (максимум распределения смещен влево), при $As < 0$ – отрицательную (максимум распределения смещен вправо); если $Ek > 0$ – вершина распределения более заостренная по сравнению с нормальным распределением, а при $Ek < 0$ – более пологая. Результаты расчета коэффициентов асимметрии и эксцесса для распределения результатов измерений сопротивлений резисторов приведены в табл. 3.

Полученные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса для распределения результатов определения сопротивления резисторов показали, что отличие экспериментального распределения результатов измерений сопротивления резисторов от нормального распределения незначимо.

Таким образом, можно сделать вывод о возможности использования генератора случайных чисел с нормальным законом распределения для проведения виртуальных экспериментов.

Список литературы

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. – Л.: Наука, 1974. – 108 с.

2. Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. – М.: Изд-во НЭВЦ ФИПТ, 1998. – 48 с.

3. Сквайрс Дж. Практическая физика // Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 246 с.

4. Смагунова А.Н. Методы математической статистики в аналитической химии / А.Н. Смагунова, О.М. Карпукова. – Иркутск: изд-во иркутского госуниверситета, 2008. – 340 с.

5. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.