

УДК 517.968:536.24

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Култышев С.Ю., Култышева Л.М.

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь,
e-mail: mathschool_pstu@mail.ru

В статье рассматривается задача нахождения параметров математической модели реального процесса по результатам измерений состояний этого процесса. Получена теорема о приближенном решении этой задачи в случае, когда модель имеет вид дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, а измерения состояний процесса производятся в дискретные моменты времени в дискретных точках трехмерного пространства. Сформулирована задача идентификации, дано доказательство теоремы о существовании приближенного решения задачи идентификации. Задача идентификации сводится к решению системы уравнений в пространстве искомых параметров при условии однозначной разрешимости этой системы. Эта теорема может быть использована при идентификации различных математических моделей, имеющих вид уравнений в частных производных второго порядка, и допускает обобщение на уравнения более высокого порядка. Приводятся примеры практического решения задачи идентификации для математических моделей распространения тепла в однородном стержне, вынужденных колебаний тяжелого стержня, распределения электрического напряжения в проводе конечной длины и малых вынужденных колебаний плоской мембраны.

Ключевые слова: задача идентификации, математическая модель, уравнения в частных производных второго порядка

IDENTIFICATION OF REAL PROCESS MODELS

Kultyshev S.Yu., Kultysheva L.M.

Perm national research polytechnic university, Perm, e-mail: mathschool_pstu@mail.ru

The article deals with the problem of finding the parameters of a mathematical model of the actual process based on the results of measurements of the state of the process. We obtain a theorem on the approximate solution of this problem in the case where the model takes the form of a differential equation of the second order, and the measurement process able to produce at discrete times at discrete points of three-dimensional space. Identification problem is formulated, given the proof of the existence of an approximate solution of the problem of identification. The problem of identification is reduced to solving the system of equations in the space of the unknown parameters, provided the unique solvability of this system. This theorem can be used to identify different mathematical models of the form of partial differential equations of the second order, and can be generalized to the equation of higher order. Examples of practical solutions to the problem of identification of mathematical models of heat propagation in a homogeneous rod, displaced the heavy vibrations of a rod, the distribution of the electric voltage in the wire of finite length and small forced oscillations of flat membranes.

Keywords: problem of identification, mathematical model, equations with partial derivative

Пусть R^n – пространство n -мерных векторов, компонентами которых являются действительные числа. Через $u(x, y, z, t)$ обозначим функцию четырех переменных, характеризующую состояние реального процесса, где

$$x \in [0, l_1] \subset R^1, y \in [0, l_2] \subset R^1,$$

$$z \in [0, l_3] \subset R^1, t \in [0, T] \subset R^1.$$

Пусть эволюция состояний этого процесса описывается дифференциальным уравнением

$$F\left(t, x, y, z, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dxdz}, \frac{d^2u}{dydz}, \frac{d^2u}{dxdt}, \frac{d^2u}{dydt}, \frac{d^2u}{dzdt}, \omega\right) = 0 \quad (1)$$

где

$$F: [0, T] \times [0, l_1] \times [0, l_2] \times [0, l_3] \times R^{14} \times R^n \rightarrow R^1$$

непрерывная функция многих переменных, ω – вектор искомых параметров, $\omega \in R^n$. Пусть известны в результате измерений $u(x_i, y_j, z_k, t_m) = u_{ijkm}$, где

$$i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}, k = \overline{0, K}, m = \overline{0, M},$$

$$x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, t_m = m\Delta t;$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ – достаточно малые положительные числа.

Задача идентификации: [1, 3] по известным u_{ijkm} найти ω , при котором выполняется равенство (1) для всех

$$x \in [0, l_1], y \in [0, l_2], z \in [0, l_3], t \in [0, T].$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx}(i, j, k, m) &= \frac{u_{i+1, jkm} - u_{ijkm}}{\Delta x}, \frac{du}{dy}(i, j, k, m) = \frac{u_{i, j+1, km} - u_{ijkm}}{\Delta y}, \frac{du}{dz}(i, j, k, m) = \\
 &= \frac{u_{ij, k+1, m} - u_{ijkm}}{\Delta z}, \frac{du}{dt}(i, j, k, m) = \frac{u_{ijk, m+1} - u_{ijkm}}{\Delta t}, \frac{d^2u}{dx^2}(i, j, k, m) = \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{du}{dx}(i+1, j, k, m) - \frac{du}{dx}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dy^2}(i, j, k, m) = \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{du}{dy}(i, j+1, k, m) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{du}{dy}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dz^2}(i, j, k, m) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{du}{dz}(i, j, k+1, m) - \frac{du}{dz}(i, j, k, m) \right], \\
 \frac{d^2u}{dt^2}(i, j, k, m) &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{du}{dt}(i, j, k, m+1) - \frac{du}{dt}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dxdy}(i, j, k, m) = \\
 &= \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{du}{dx}(i, j+1, k, m) - \frac{du}{dx}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dxdz}(i, j, k, m) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{du}{dx}(i, j, k+1, m) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{du}{dx}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dydz}(i, j, k, m) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{du}{dy}(i, j, k+1, m) - \frac{du}{dy}(i, j, k, m) \right], \\
 \frac{d^2u}{dxdt}(i, j, k, m) &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{du}{dx}(i, j, k, m+1) - \frac{du}{dx}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dydt}(i, j, k, m) = \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{du}{dy}(i, j, k, m+1) - \frac{du}{dy}(i, j, k, m) \right], \frac{d^2u}{dzdt}(i, j, k, m) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{du}{dz}(i, j, k, m+1) - \frac{du}{dz}(i, j, k, m) \right].
 \end{aligned}$$

Пусть $n \leq (I+1)(J+1)K+1)(M+1)$, тогда справедлива
Теорема 1. Если в системе

$$\begin{aligned}
 &\{F(t_m, x_i, y_j, z_k, u_{ijkm}), \frac{du}{dx}(i, j, k, m), \frac{du}{dy}(i, j, k, m), \frac{du}{dz}(i, j, k, m), \frac{du}{dt}(i, j, k, m), \\
 &\frac{d^2u}{dx^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dy^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dz^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dt^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dxdy}(i, j, k, m), \\
 &\frac{d^2u}{dxdz}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dydz}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dxdt}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dydt}(i, j, k, m), \frac{d^2u}{dzdt}(i, j, k, m),
 \end{aligned}$$

$$\omega) = 0, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}, k = \overline{0, K}, m = \overline{0, M}\}, \quad (2)$$

найдется подсистема из n уравнений, которая имеет единственное решение $\tilde{\omega}$, то задача идентификации имеет приближенное решение $\tilde{\omega}$.

Доказательство. В силу принятых обозначений справедливы приближенные равенства:

$$\begin{aligned}\frac{du(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dx} &\approx \frac{du}{dx}(i, j, k, m), \frac{du(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dy} \approx \frac{du}{dy}(i, j, k, m), \\ \frac{du(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dz} &\approx \frac{du}{dz}(i, j, k, m), \frac{du(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dt} \approx \frac{du}{dt}(i, j, k, m), \\ \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dx^2} &\approx \frac{d^2u}{dx^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dy^2} \approx \frac{d^2u}{dy^2}(i, j, k, m), \\ \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dz^2} &\approx \frac{d^2u}{dz^2}(i, j, k, m), \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dt^2} \approx \frac{d^2u}{dt^2}(i, j, k, m), \\ \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dxdy} &\approx \frac{d^2u}{dxdy}(i, j, k, m), \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dxdz} \approx \frac{d^2u}{dxdz}(i, j, k, m), \\ \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dydz} &\approx \frac{d^2u}{dydz}(i, j, k, m), \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dxdt} \approx \frac{d^2u}{dxdt}(i, j, k, m), \\ \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dydt} &\approx \frac{d^2u}{dydt}(i, j, k, m), \frac{d^2u(x_i, y_j, z_k, t_m)}{dzdt} \approx \frac{d^2u}{dzdt}(i, j, k, m).\end{aligned}$$

Следовательно, искомое ω удовлетворяет приближенно системе (2) и найденной ее подсистеме. Но эта подсистема имеет единственное решение $\tilde{\omega}$, следовательно $\tilde{\omega} \approx \omega$, то есть задача идентификации имеет приближенное решение $\tilde{\omega}$. Эту теорему иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована, а концы поддерживаются при постоянной температуре. Распространение тепла в таком стержне описывается уравнением теплопроводности [2, 4, 5]:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}, x \in [0, l], t \in [0, T].$$

Положим $l = 1, T = 1, \Delta x = 0,01, \Delta t = 0,01, a = \omega = 1$.

Тогда $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0,02, t_0 = 0, t_1 = 0,01, t_2 = 0,02$.

Решение этого уравнения при $a = 1$ с краевыми условиями

$$u(0, t) = 1, u(1, t) = 2, u(x, 0) = 1 + x + \sin \pi x$$

имеет вид

$$u(x, t) = 1 + x + e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

В результате измерений известны

$$u_{0,0} = 1, u_{1,0} = 1,04139, u_{2,0} = 1,08276,$$

$$u_{0,1} = 1, u_{1,1} = 1,03844.$$

Далее

$$\frac{du}{dt}(0,0) = 0, \frac{du}{dt}(1,0) = -0,29477,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(1,0) = -0,3068.$$

Система (2), составленная для этого примера, имеет в своем составе подсистему (уравнение)

$$\frac{du}{dt}(1,0) - \omega^2 \frac{d^2u}{dx^2}(1,0) = 0,$$

где $\omega = a$.

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{\frac{du}{dt}(1,0)}{\frac{d^2u}{dx^2}(1,0)} = 0,96078$$

и далее $\tilde{\omega} = 0,98019$.

Следовательно, искомое a имеет приближенное значение $a \approx \tilde{\omega} = 0,98019 \approx 1$.

Пример 2. Рассмотрим тяжелый, но легко растяжимый стержень, длина которого в нерастянутом состоянии равна l . Подвесим его за конец $x = 0$, а другой конец $x = l$ оставим свободным. Обозначим через $u(x, t)$ смещение сечения с абсциссой x в момент времени t . Уравнение вынужденных продольных колебаний этого стержня имеет вид [2, 6]:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + g, t \in [0, T], x \in [0, l],$$

где g – ускорение свободного падения. Пусть

$$l = 1, T = 1, \Delta x = 0,001, \Delta t = 0,001,$$

$$x_i = i\Delta x, t_j = j\Delta t, t_0 = 0,$$

$$t_{1000} = 1, x_0 = 0, x_{1000} = 1.$$

Решение этого уравнения при $a = 1$, $g = 9,8$ с краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \frac{du(l, t)}{dx} = 0, \frac{du(x, 0)}{dt} = 0,$$

$$u(x, 0) = 4,9x(2-x) - \frac{156,8}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{2},$$

имеет вид

$$u(x, t) = 4,9x(2-x) - \frac{156,8}{\pi^2} \cos \frac{\pi t}{2} \sin \frac{\pi x}{2},$$

где $\pi = 3,14$.

Измерения состояния этого процесса имеют вид

$$u(x_i, t_j) = u_{ij}, i = \overline{0, 1000}, j = \overline{0, 1000}.$$

$$u(0, t) = 2e^{-t\sqrt{2}} \sin \left(t \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right),$$

$$u(x, 0) = 0, u(1, t) = 0$$

имеет вид

$$u(x, t) = 2e^{-t\sqrt{2}} \sin \left(t \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right) \cos \frac{\pi x}{2}. \quad (3)$$

Положим,

$$\Delta x = 0,001, \Delta t = 0,001, x_i = i\Delta x, t_j = j\Delta t, x_{1000} = 1, t_{1000} = 1.$$

Тогда в результате измерений получим $u(x_i, t_j) = u_{ij}$, $i = \overline{0, 1000}$, $j = \overline{0, 1000}$ по формуле (3).

Рассмотрим подсистему системы (2) для этого примера вида

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2}(0, 0)a^2 + g = \frac{d^2 u}{dt^2}(0, 0), \\ \frac{d^2 u}{dx^2}(1000, 0)a^2 + g = \frac{d^2 u}{dt^2}(1000, 0), \end{cases}$$

где

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(0, 0) = -9,85231, \frac{d^2 u}{dt^2}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(1000, 0) = 29,43512,$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(1000, 0) = 39,29431.$$

Решая эту подсистему относительно $\omega = \{a, g\}$, получаем единственное решение $\tilde{\omega} = \{\tilde{a}, \tilde{g}\}$, где $\tilde{a} = 1,00009$, $\tilde{g} = 9,85398$. Таким образом

$$\omega \approx \tilde{\omega} = \{\tilde{a}, \tilde{g}\} =$$

$$= \{1,00009, 9,85398\} \approx \{1,9,8\}.$$

Пример 3. Рассмотрим провод длины $l = 1$, направив ось x вдоль провода. Напряжение вдоль провода обозначим через $u(x, t)$, где t – время, $t \in [0, T]$, $T = 1$. Согласно [2] распределение напряжений описывается телеграфным уравнением

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = a \frac{d^2 u}{dt^2} + 2b \frac{du}{dt} + cu, t \in [0, T], x \in [0, l],$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты. Решение этого уравнения при $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ и краевых условиях

Рассмотрим подсистему системы (2) для этого примера вида

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2}(0,0)a + \frac{du}{dt}(0,0)2b + u_{0,0}c = \frac{d^2 u}{dx^2}(0,0), \\ \frac{d^2 u}{dt^2}(500,500)a + \frac{du}{dt}(500,500)2b + u_{500,500}c = \frac{d^2 u}{dx^2}(500,500), \\ \frac{d^2 u}{dt^2}(0,1000)a + \frac{du}{dt}(0,1000)2b + u_{0,1000}c = \frac{d^2 u}{dx^2}(0,1000), \end{cases}$$

где

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(0,0) = -6,84664, \frac{du}{dt}(0,0) = 2,42066, u_{0,0} = 0, \frac{d^2 u}{dx^2}(0,0) = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(500,500) = -1,75091, \frac{du}{dt}(500,500) = 0,13313, u_{500,500} = 0,39686,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2}(500,500) = -0,97821, \frac{d^2 u}{dt^2}(0,1000) = -0,34344, \frac{du}{dt}(0,1000) = -0,43588,$$

$$u_{0,1000} = 0,45499, \frac{d^2 u}{dx^2}(0,1000) = -1,12150.$$

В результате решения этой подсистемы (линейной алгебраической системы) получаем единственное решение:

$$\tilde{\omega} = \{\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\} = \{0,99995, 1,41412, 0,99934\}.$$

Таким образом, $\tilde{\omega} \approx \omega = \{1, \sqrt{2}, 1\}$.

Пример 4. Рассмотрим квадратную мембрану размерами $a \times b$, где $a = 1$, $b = 1$, закрепленную по краям на плоскости (x, y) , $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, на отрезке времени $[0, \tau]$, $\tau = 1$. Согласно [1] малые колебания этой мембраны описываются волновым уравнением

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{Z(t, x, y)}{T},$$

$$t \in [0, 1], x \in [0, 1], y \in [0, 1],$$

где c – скорость распространения волны, T – натяжение мембраны, $Z(t, x, y)$ – давление на мембрану, $u(t, x, y)$ – смещение от положения равновесия. Краевые и начальные условия имеют вид

$$u(t, 0, y) = u(t, x, 0) = u(t, 1, y) = u(t, x, 1) = 0,$$

$$u(0, x, y) = \frac{1}{c^2 \pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

$$\frac{du(0, x, y)}{dt} = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Пусть

$$Z(t, x, y) = 2\pi^2 T(t - t^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

и пусть $c = 1$, $T = 1$. Тогда решение этой краевой задачи имеет вид

$$u(t, x, y) = (1 + t - t^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Возьмем

$$\Delta x = 0,001, \Delta y = 0,001, \Delta t = 0,001,$$

$$x_i = i\Delta x, y_i = i\Delta y, t_i = i\Delta t, i = \overline{0, 1000},$$

$$x_{1000} = 1, y_{1000} = 1, t_{1000} = 1,$$

тогда

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(0, 500, 500) = -1,99881, \frac{d^2 u}{dx^2}(0, 500, 500) = -0,99901,$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2}(0, 500, 500) = -0,99991, Z(0, 500, 500) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}(500,500,500) &= -1,99891, \frac{d^2u}{dx^2}(500,500,500) = -3,46500, \\ \frac{d^2u}{dy^2}(500,500,500) &= -3,46512, Z(500,500,500) = 4,92970.\end{aligned}$$

Возьмем подсистему системы (2) для этого примера вида

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2}(0,500,500) \frac{1}{c^2} - Z(0,500,500) \frac{1}{T} = \frac{d^2u}{dx^2}(0,500,500) + \frac{d^2u}{dy^2}(0,500,500), \\ \frac{d^2u}{dt^2}(500,500,500) \frac{1}{c^2} - Z(500,500,500) \frac{1}{T} = \frac{d^2u}{dx^2}(500,500,500) + \frac{d^2u}{dy^2}(500,500,500). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $\{c, T\}$, а эта система линейная алгебраическая (с ненулевым определителем) относительно величин $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{T}$, получаем $\tilde{c} = 0,99854$, $\tilde{T} = 0,99672$. То есть решение задачи идентификации для этого примера имеет вид

$$\{\tilde{c}, \tilde{T}\} = \{0,99854, 0,99672\} \approx \{1, 1\}.$$

Пример закончен.

Заключение

Полученная теорема позволяет эффективно решать поставленную задачу идентификации (особенно в случае, когда математическая модель линейно зависит от искомых параметров), поскольку решаемая подсистема имеет меньшую размерность, чем исходная система уравнений относительно упомянутых параметров. Эти результаты могут быть распространены на случай, когда измерения состояния модели-

руемого процесса производятся косвенно, то есть описываются функционалами или операторами более общего вида, нежели значения в дискретных точках трехмерного пространства в дискретные моменты времени, и для моделей более общего вида [5, 6].

Статья написана при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00338).

Список литературы

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Идентификация в задачах теплопроводности. – Киев: Наукова думка, 1982. – 240 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
5. Шаталов Ю.С. Интегральные представления постоянных коэффициентов теплопереноса (учебное пособие). – Уфа: Уфимский авиационный институт, 1992. – 81 с.
6. Шаталов Ю.С. Функционально-интегральные уравнения теплофизических характеристик. – М.: Наука, 1996. – 304 с.