УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЕМОВ НАХОЖДЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОРИЕНТИРОВОЧНОЙ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Романова Т.Е., Романов П.Ю.

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск, e-mail: romanova.te@mail.ru, romanov-magu@mail.ru

В статье предпринята попытка реализовать теорию поэтапного формирования умственных действий в процессе обучения школьников решению задач с параметрами. На основе разработанной авторами системы задач предлагается методика построения ориентировочной основы решения параметрических задач. Предлагаемая последовательность задач, составленная с учетом сформулированных авторами требований, способствует активному участию школьников в построении ориентировочной основы решения задач данного типа. Разнообразные задачи позволяют корректировать и совершенствовать ориентировочную основу в зависимости от сложности квадратных уравнений с параметрами и уравнений, к ним сводимым. При этом создаваемые учащимися приемы поиска контрольных значений параметров, включенные в ориентировочную основу действий, позволяют избежать громоздких математических вычислений, формируя исследовательские умения школьников и подготавливая их к осуществлению исследовательской деятельности.

Ключевые слова: задачи с параметрами, ориентировочная основа деятельности, контрольные значения параметра

USING THE TECHNIQUES OF FINDING THE CONTROL PARAMETER VALUES WHEN BUILDING AN INDICATIVE BASIS SOLVING QUADRATIC EQUATIONS WITH A PARAMETER

Romanova T.E., Romanov P.Y.

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, e-mail: romanova.te@mail.ru, romanov-magu@mail.ru

The article makes an attempt to implement the theory of gradual formation of mental actions in the process of teaching students the task solution parameters. Based on the authors ‘ system of tasks is proposed a method of constructing approximate basis for the solution of parametric problems. The proposed sequence of tasks, tailored formulated by the authors of the requirements promotes the active participation of students in building a tentative basis for the decision of tasks of this type. Various tasks allow you to adjust and improve an indicative basis, depending on the complexity of quadratic equations with parameters and equations reducible to them. The techniques of search control values of the parameters included in the indicative action framework, allow you to avoid the cumbersome mathematical calculations, preparing students to implement research activities.

Keywords: tasks with parameters, estimated based activities, the control parameter value

Задачи с параметрами уверенно вошли в материалы государственной итоговой аттестации и единого государственного экзамена по математике. Их решение вызывает немалые трудности у учащихся, которые могут быть объяснены отсутствием в ныне действующих учебниках четких методических указаний по решению задач данного класса.

Психологов всегда интересовал процесс усвоения знаний и умений учащимися. Как правильно организовать работу по усвоению знаний и умений учащимися? Ответить на этот вопрос позволила теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина.

Классно-урочная форма обучения, на наш взгляд, позволяет организовывать следующие этапы данной теории: ориентировка школьников в материале и способах работы с ним; осуществление пошагового контроля за усвоением каждого действия каждым школьником в ходе решения задачи; переход от пошагового контроля школьников к их самоконтролю [4].

Приведем примеры разработанных нами систем заданий по теме «Квадратные уравнения с параметрами» [2]. При их составлении мы руководствовались тем, что:

– число задач, входящих в систему, должно быть достаточным для организации каждого из этапов теории;

– сложность задач в системе должна нарастать постепенно;

– последовательность задач должна способствовать активному участию школьников в моделировании ориентировочной основы формируемого действия.

Изучение данной темы необходимо начать с рассмотрения *неполных квадратных уравнений с параметрами.*

Задание 1. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $ax^2 = 0$;

2) $(a - 2)(x - 1)^2 = 0$;

3) $\left(3-\sqrt{a}\right)\cdot x^2 = 0$;

4) $\left(\sqrt{a}-5\right)\cdot\left(x-1\right)^2 = 0$.

Далее переходим к решению приведенных квадратных уравнений, числовое значение дискриминанта которых представляет собой квадрат целого числа.

Задание 2. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$x^2 + 5ax = 14a^2.$$

$$x^2 + 5ax - 14a^2 = 0; \quad D = 25a^2 + 56a^2 = 81a^2;$$

$$x=\frac{-5a\pm\sqrt{81a^2}}{2}; \quad x=\frac{-5a\pm|9a|}{2}=\left[\begin{array}{l}-7a,\\ 2a.\end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра a уравнение имеет корни $x = -7a$ и $x = 2a$.

Задание 3. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $x^2 = -6ax - 8a^2$;

2) $x^2 - 18a^2 = 3ax$;

3) $x^2 + 8ax + 7a^2 = 0$;

4) $x^2 - 15a^2 = 2ax$.

Следующим этапом решения квадратных уравнений с параметром является решение уравнений, дискриминант которых есть полный квадрат некоторого двучлена.

Задание 4. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$x^2 + (4 - 2a)x = 8a.$$

$$x^2 + (4 - 2a)x - 8a = 0;$$

$$x^2 + 2(2 - a)x - 8a = 0;$$

$$\frac{D}{4}=\left(2-a\right)^2+8a=\left(a+2\right)^2;$$

$$x=\left(a-2\right)\pm|a+2|; \quad x=\left[\begin{array}{l}a-2+a+2=2a,\\ a-2-a-2=-4.\end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра a уравнение имеет корни $x = 2a$ и $x = -4$.

Решение вышепредставленных уравнений позволяет составить ориентировочную основу действий (ООД) для решения квадратных уравнений с параметрами данного типа.

ООД решения квадратных уравнений с параметрами

- Привести уравнение к стандартному виду.
- Найти дискриминант квадратного уравнения.
- Найти контрольное значение параметра, исследуя дискриминант.
- Найти корни уравнения при контрольном значении параметра.
- Найти корни уравнения при остальных значениях параметра.
- Заполнить развертку по параметру и записать ответ.

Развертка по параметру позволяет систематизировать, обобщить и интерпретировать полученные результаты [3]. Далее учащиеся должны познакомиться с новым для них приемом решения квадратных уравнений – понижения степени. Овладевая им, учащиеся начинают понимать, что при определенных значениях параметра, квадратное уравнение приобретает статус линейного, решение которых учащимся известно [5, 6].

Задание 5. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$(2a - 3)x^2 + a + 1 = (3a - 2)x.$$

Для решения данного уравнения воспользуемся приемом понижения степени. Приравняем к нулю коэффициент при x^2 и найдем значение параметра a, при котором квадратное уравнение превращается в линейное:

$$2a - 3 = 0; \; a = 1,5.$$

При $a = 1,5$ исходное уравнение принимает вид

$$-(3\cdot 1,5 - 2)x + 1,5 + 1 = 0,$$

откуда $x = 1$.

Найдем корни уравнения

$$(2a - 3)x^2 - (3a - 2)x + a + 1 = 0$$

для всех $a \neq 0$:

$$D = (3a - 2)^2 - 4(2a - 3)(a + 1);$$

$$D = a^2 - 8a + 16; \; D = (a - 4)^2;$$

$$x=\frac{\left(3a-2\right)\pm\sqrt{D}}{2\left(2a-3\right)}.$$

Анализируя значения дискриминанта, получаем контрольное значение параметра $a = 4$. Для $a = 4$ исходное уравнение имеет корень четной кратности $x = 1$.

Если $a \neq 1{,}5$ и $a \neq 4$, то

$$x = \frac{(3a-2) \pm \sqrt{(a-4)^2}}{2(2a-3)} = \frac{(3a-2) \pm |a-4|}{2(2a-3)} = \left[\begin{array}{l} 1, \\ \dfrac{a+1}{2a-3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $a = 1{,}5$; $a = 4$: $x = 1$;

$$a \neq 1{,}5 \quad a \neq 4: \quad x = 1, \quad x = \frac{a+1}{2a-3}.$$

Если при решении задания 5 дискриминант представлял собой полный квадрат двучлена, то уравнение задания 6 не обладает данным преимуществом. Поэтому при его решении необходимо провести полное исследование дискриминанта (квадратного трехчлена).

Задание 6. При всех значениях параметра а решить уравнение

$$(a - 2)x^2 - 2ax = 3 - 2a.$$

Преобразуем уравнение к стандартному виду

$$(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$$

и применим к нему прием понижения степени.

Если $a - 2 = 0$, то $a = 2$, и уравнение принимает вид $-4x + 1 = 0$, откуда $x = 0{,}25$.

Если $a \neq 2$, то

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a-2)(2a-3) = -a^2 + 7a - 6.$$

Исследуем дискриминант:

1. Если

$$-a^2 + 7a - 6 > 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(a-6) < 0 \Leftrightarrow 1 < a < 6,$$

то уравнение имеет два корня. Получили два новых контрольных значения параметра a: и

Если $a = 1$, то уравнение принимает вид

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

откуда $x = -1$.

Если $a = 6$, то уравнение принимает вид

$$4x^2 - 12x + 5 = 0,$$

откуда $x = 1{,}5$.

Если $1 < a < 6$, то

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a-2}.$$

2. Если

$$(a - 1)(a - 6) > 0,$$

то уравнение не имеет корней.

Ответы: $a = 1$: $x = -1$; $a = 2$: $x = 0{,}25$;

$$a = 6: x = 1{,}5;$$

$$1 < a < 2 \text{ и } 2 < a < 6:$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a-2};$$

$a < 1$ и $a > 6$: решений нет.

Овладение новым приемом решения квадратных уравнений ставит вопрос о корректировке ООД решения квадратных уравнений с параметрами.

ООД решения квадратных уравнений с параметрами

- Привести уравнение к стандартному виду.
- Найти контрольные значения параметра, используя прием понижения степени уравнения.
- Найти корни уравнения при этом значении параметра.
- Найти дискриминант квадратного уравнения.
- Найти контрольное значение параметра, исследуя дискриминант.
- Найти корни уравнения при новых контрольных значениях параметра.
- Найти корни уравнения при остальных значениях параметра.
- Заполнить развертку по параметру и записать ответ.

Усвоить ориентировочную основу решения полных квадратных уравнений с параметрами можно при помощи уравнений задания 7.

Задание 7. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$;

2) $(a - 1)x^2 + 1 = 2x + a$;

3) $(b - 2)x^2 + 3b + 2 = 4bx$;

4) $ax^2 = (a + 1)x + 1 + 2a$.

Далее переходим к рассмотрению дробно-рациональных уравнений с параметрами, решение которых сводится к решению квадратных уравнений. При решении уравнений данного вида необходимо с самого начала указывать значения параметра и переменной, при которых уравнение имеет смысл.

Знание области допустимых значений переменной и параметра позволяет в дальнейшем исследовать корни уравнения.

Изучение дробно-рациональных уравнений начинаем с уравнений, числитель которых представляет собой квадратный трехчлен в самом «хорошем случае» – его дискриминант является полным квадратом.

Задание 8. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$x-1=\frac{6ax+4a-5a^2}{x+1}.$$

Укажем область допустимых значений переменной x: $x \neq -1$.

Преобразуем уравнение к стандартному виду

$$x^2-6ax+5a^2-4a-1=0$$

и найдем его корни:

$$\frac{D}{4}=9a^2-5a^2+4a+1=4a^2+4a+1=(2a+1)^2;$$

$$x=3a\pm(2a+1)=\left[\begin{array}{l} x=5a+1, \\ x=a-1. \end{array}\right.$$

Найденные корни должны быть отличны от нуля, то есть $5a+1 \neq -1$ или $a-1 \neq -1$. Откуда $a \neq -0{,}4$, $a \neq 0$.

Найденные значения параметра a представляют собой его контрольные значения. При них исходное уравнение имеет один корень $x = 1$ или $x = -1{,}4$.

Ответ:

$$a \neq -0{,}4:\quad x=-1{,}4;$$

$$a \neq 0:\quad x=1;$$

$$a \neq -0{,}4,\ a \neq 0:\quad x=5a+1;\ x=a-1.$$

Задание 9. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$\frac{(x-2a)(x+a)}{a}=\frac{3x}{a}+6-3x-2a.$$

Решение данного уравнения требует ограничений на параметр: $a \neq 0$. При этом условии исходное уравнение равносильно уравнению

$$x^2-(2a-3)x-6a=0.$$

Решая его, находим, что $x = 3$ или $x = -2a$. Записываем ответ.

Ответ:

$$a = 0: \text{ решений нет;}$$

$$a \neq 0:\quad x=3;\quad x=-2a.$$

Далее знакомим учащихся с решением дробно-рациональных уравнений, решение которых сводится к квадратному уравнению с дискриминантом, не являющимся полным квадратом. Учащиеся понимают, что в этом случае корень из дискриминанта не извлекается, и они сталкиваются с необходимостью решать иррациональные уравнения, что довольно трудоемко, особенно для детей, которые по возрастным показателям еще не владеют техникой их решения. В этом случае на помощь может прийти прием, ведущий к цели более коротким и технически простым путем.

Задание 10. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$\frac{x+a}{x-5}+\frac{1}{x+5}=\frac{19}{25-x^2}.$$

Запишем ограничения на значения переменной x: $x \neq \pm 5$. После необходимых преобразований, перейдем к системе, равносильной исходному уравнению:

$$\begin{cases} x^2+(6+a)x+(5a+14)=0, \\ x \neq \pm 5. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения, равен

$$D = 36 + 12a + a^2 - 4(5a + 14) = a^2 - 8a - 20.$$

Так что для того, чтобы уравнение имело корни, необходимо, чтобы $a^2 - 8a - 20 \geq 0$. Последнее неравенство выполняется для $a \leq -2$ или $a \geq 10$.

При остальных значениях параметра a квадратное уравнение решений не имеет и, тем более, не имеет решений исходное уравнение.

Итак, при $a \leq -2$ или $a \geq 10$ квадратное уравнение имеет два корня

$$x=\frac{-(6+a)\pm\sqrt{a^2-8a-20}}{2}.$$

Исключим посторонние корни. Для этого найдем значения параметра a, при которых x будет равняться 5 или –5:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-(6+a)\pm\sqrt{a^2-8a-20}}{2}=5, \\ \dfrac{-(6+a)\pm\sqrt{a^2-8a-20}}{2}=-5. \end{array}\right.$$

Выполнение данных условий требует решения четырех иррациональных уравнений.

Выйти из затруднительного положения позволяет следующее рассуждение: каждое значение параметра задает свое, соответствующее только этому значению параметру, уравнение. Естественно, что каждое уравнение, в свою очередь, предполагает свой «набор» корней. Значит, справедливо и обратное: определенному значению переменной x соответствует «свое» значение параметра a.

Поэтому вычислим значения квадратного трехчлена в «запрещенных» точках:

$$\left[\begin{array}{l} f(-5)=(-5)^2-5(6+a)+(5a+14), \\ f(5)=(5)^2+5(6+a)+(5a+14). \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} f(-5)=0, \\ f(5)=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 25-30-5a+5a+14=0, \\ 25+30+5a+5a+14=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{решений нет,} \\ a=-6,9. \end{array}\right.$$

Итак, если $a = -6{,}9$, то

$$x=\frac{0{,}9\pm\sqrt{47{,}61+55{,}2-20}}{2}=\frac{0{,}9\pm 9{,}1}{2}=\left[\begin{array}{l} 5, \\ -4{,}1. \end{array}\right.$$

Но $x = 5$ не является корнем, следовательно, остается корень $x = -4{,}1$.

Для завершения решения, найдем корни уравнения в контрольных точках $a = -2$ и $a = 10$: если $a = -2$, то $x = -2$; если $a = 10$, то $x = -8$.

Ответ:

$$a = -6{,}9\colon x = -4{,}1;$$

$$a = -2\colon x = -2;$$

$$a = 10\colon x = -8;$$

$$-2 < a < 10\colon \text{решений нет;}$$

$$a < -6{,}9;\ -6{,}9 < a < -2;\ a > 10\colon$$

$$x=\frac{-(6+a)\pm\sqrt{a^2-8a-20}}{2}.$$

В свете рассмотренных дробно-рациональных уравнений с параметрами внесем дополнения в ориентировочную основу решения уравнений, сводимых к квадратным.

ООД решения дробно-рациональных уравнений с параметрами

- Найти области *допустимых значений переменной и параметра.*
- Привести уравнение к стандартному виду.
- Найти контрольное значение параметра, используя *прием понижения степени уравнения.*
- Найти корни уравнения при этом значении параметра.
- Найти дискриминант квадратного уравнения.
- Найти контрольные значения параметра, *исследуя дискриминант.*
- Найти корни уравнения при новых контрольных значениях параметра.
- Найти контрольные значения параметра по области допустимых значений переменной, *используя прием подстановки «запрещенных» значений переменной в формулу корней квадратного уравнения.*
- Найти корни уравнения при остальных значениях параметра.
- Заполнить развертку по параметру и записать ответ.

Составленная ориентировочная основа решения квадратных уравнений и уравнений, к ним сводимых, позволяет выделить **приемы нахождения контрольных значений параметра**, от знания которых зависит решение уравнения:

1. Нахождение области допустимых значений параметра.
2. Использование приема понижения степени уравнения.
3. Исследование дискриминанта.
4. Исключение посторонних корней уравнения по области допустимых значений переменной (прием подстановки «запрещенных» значений переменной в формулу корней квадратного уравнения).

Рассмотрим решение дробно-рационального уравнения с параметром, сводимого к квадратному, которое сочетает в себе использование всех выделенных приемов нахождения контрольных значений параметра.

Задание 11. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$\frac{x}{a+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{3a-4}{(a+1)(x-2)}.$$

Областью допустимых значений переменной являются все $x \neq 2$, параметра – все $a \neq -1$.

При $a = -1$ уравнение не имеет смысла, а значит, не имеет решений.

Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 + 2ax + 4 - 3a = 0$$

и найдем его корни, отличные от 2. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части уравнения, равен

$$\frac{D}{4}=a^2+3a-4;\quad x=-a\pm\sqrt{a^2+3a-4}.$$

Естественно, для того чтобы уравнение имело решения, дискриминант должен быть неотрицательным:

$$a^2+3a-4\geq 0,$$

откуда $\left[\begin{array}{l} a\leq -4, \\ a\geq 1. \end{array}\right.$

Получили новые контрольные значения параметра a: $a=-4$ и $a=1$.

Если $a=-4$, то $x=4$. Если $a=1$, то $x=-1$.

Составим уравнение, позволяющее найти те значения параметра a, при которых переменная x принимает значение 2:

$$-a\pm\sqrt{a^2+3a-4}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+3a-4}=2+a, \\ \sqrt{a^2+3a-4}=-2-a. \end{array}\right.$$

Видим, что для нахождения контрольных значений параметра a, при которых корни уравнения принимают статус «запрещенных», необходимо решить два иррациональных уравнения. Чтобы избежать этого, воспользуемся рассмотренным выше приемом и найдем новые контрольные значения параметра a, подставив в уравнение

$$x^2+2ax+4-3a=0,$$

«запрещенные» значения переменной x:

$$2^2+2a\cdot 2+4-3a=0,$$

откуда $a=-8$. Систематизируем полученные решения и запишем ответ.

Ответ:

$$a=-8:\ x=14;$$

$$a=-4:\ x=4;$$

$$a=1:\ x=-1;$$

$$-4<a<1,\ a\neq -1: \text{ решений нет;}$$

$$a\neq -8,\ -4<a,\ a>1:\quad x=-a\pm\sqrt{a^2+3a-4}.$$

Предлагаемая методика построения ООД позволяет обучить школьников решению целого класса задач с параметрами, а совместное выделение приема нахождения контрольных значений готовит учащихся к осуществлению исследовательской деятельности, освоению профессионально значимых умений [1].

Список литературы

1. Романов П.Ю. Технология воспитания педагога-исследователя в системе непрерывного образования // Научные труды МПГУ. Серия: Естественные науки. – 2001. – С. 290–294.

2. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Решение задач с параметрами // Математика. Первое сентября. – 2001. – № 12. – С. 13–15.

3. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Роль графической интерпретации результатов решения задач с параметрами в организации исследовательской деятельности учащихся // Современные проблемы обучения математике в школе / ред. Е.И. Жилина. – Магнитогорск, 2000. – С. 84–90.

4. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Системный подход в обучении учащихся написанию уравнения касательной к графику функции // Систематизация и обобщения при обучении школьников математике / под ред. Е.И. Жилиной. – Магнитогорск, 1998. – С. 36–41.

5. Романова Т.Е. Исследование систем линейных уравнений с двумя неизвестными и параметром // Педагогические аспекты математического образования / под ред. П.Ю. Романова. – Магнитогорск, 2011. – С. 112–117.

6. Романова Т.Е. Решение уравнений и неравенств первой степени. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля: учебное пособие. – Магнитогорск, 2004. – 63 с.