УДК 681.5.09

УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ВИНОГРАДОВЫХ ПЕРЕНОСА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ПРОИЗВОЛЬНУЮ ТОЧКУ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю.

НП НИТУ «Южный инновационно-технологический университет», Ростов-на-Дону, e-mail: vinogradov@intmail.net

В статье определяется возможность использования методов математического моделирования для становления процесса развития информационных систем в ракетно-космической отрасли. По сравнению с изложенным ранее описанием метода сначала приводятся известные формулы теории матриц для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), вступительно рассматривается вариант метода для нежестких краевых задач, выписаны формулы пошагового переноса краевых условий в рассматриваемые точки интервала интегрирования для нежестких и жестких краевых задач, приводятся иные формулы построчного ортонормирования переносимых матричных уравнений краевых условий жестких краевых задач, приводится иной вариант расчета вектора частного решения систем неоднородных ОДУ жестких краевых задач. Результаты проверочных расчетов совпали с результатами другого метода Виноградовых – метода решения жестких краевых задач без ортонормирования. Описывается применение метода в условном разбиении траекторий полета космического аппарата на характерные участки, определении рациональных программ управления и сопряжении полученных результатов. Применение метода позволяет избежать сложных вычислительных процедур, используемых при расчете оптимальных траекторий классическими методами. Приводятся результаты апробации разработанного метода при расчетах траекторий выведения при вертикальном и горизонтальном стартах космического аппарата.

Ключевые слова: жесткие краевые задачи, перенос краевых условий, метод, расчет полета

REFINED METHODS OF BOUNDARY CONDITION TRANSFER VINOGRADOV IN AN ARBITRARY POINT OF THE INTERVAL OF INTEGRATION FOR SOLVING STIFF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Vinogradov Yu.I., Vinogradov A.Yu.

South Innovation and Technology University, Rostov-on-Don, e-mail: vinogradov@intmail.net

The article defines the use of mathematical modeling techniques for the development of development of information systems in the aerospace industry. Compared with the above previously described method initially are known formula of the theory of matrices for systems of ordinary differential equations (ODE), the entrance is considered a variant of the method for non-rigid boundary-written formula incremental transfer of boundary conditions at the point of the interval of integration for non-rigid and rigid boundary value problems are other progressive formula orthonormality portable matrix equations of the boundary conditions of rigid boundary value problems, is another version of the calculation of the vector of a particular solution of inhomogeneous systems of hard ODE boundary value problems. The results of test calculations coincided with the results of another method of Vinogradov – method for solving boundary value problems without hard orthonormality. We describe the method used in spacecraft flight paths Conditional Split on specific areas, determining the best management programs and the pairing of the results. Application of the method avoids complex computational procedures used in the calculation of optimal trajectories of classical methods. The results of testing of the developed method in calculating trajectories for removing vertical and horizontal starts spacecraft.

Keywords: rigid boundary value problems, the transfer of boundary conditions, method of calculation of the flight

Рассмотрим пример системы дифференциальных уравнений цилиндрической оболочки ракеты – системы обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка (после разделения частных производных методом Фурье). Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\boldsymbol{Y}'(x) = A\boldsymbol{Y}(x) + \boldsymbol{F}(x),$$

где $\boldsymbol{Y}(x)$ – искомая вектор-функция задачи размерности 8x1, $\boldsymbol{Y}'(x)$ – производная искомой вектор-функции размерности 8x1, A – квадратная матрица коэффициентов дифференциального уравнения размерности 8x8, $F(x)$ – вектор-функция внешнего воздействия на систему размерности 8x1. Здесь и далее векторы обозначаем **жирным** шрифтом вместо черточек над буквами. Краевые условия имеют вид

$$U\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{u},$$

$$V\boldsymbol{Y}(1) = \boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{Y}(0)$ – значение искомой вектор-функции на левом крае $x = 0$ размерности 8x1, U – прямоугольная горизонтальная матрица коэффициентов краевых условий левого края размерности 4x8, $\boldsymbol{u}$ – вектор внешних воздействий на левый край размерности 4x1, $\boldsymbol{Y}(1)$ – значение искомой вектор-функции на правом крае $x = 1$ размерности 8x1,

V – прямоугольная горизонтальная матрица коэффициентов краевых условий правого края размерности 4х8, $\boldsymbol{v}$ – вектор внешних воздействий на правый край размерности 4х1. В случае, когда система дифференциальных уравнений имеет матрицу с постоянными коэффициентами $A = \text{const}$, решение задачи Коши имеет вид [10]:

$$\boldsymbol{Y}(x) = e^{A(x-x0)}\boldsymbol{Y}(x_0) + e^{Ax}\int_{x0}^{x} e^{-At}\boldsymbol{F}(t)dt,$$

где

$$e^{A(x-x0)} = E + A(x-x_0) + A^2(x-x_0)^2 / 2! + A^3(x-x_0)^3 / 3! + \ldots,$$

где E – это единичная матрица.

Матричная экспонента ещё может называться матрицей Коши или матрициантом и может обозначаться в виде

$$K(x \leftarrow x_0) = K(x - x_0) = e^{A(x-x0)}.$$

Тогда решение задачи Коши может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{Y}(x) = K(x \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_0),$$

где $\boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_0) = e^{Ax}\int_{x0}^{x} e^{-At}\boldsymbol{F}(t)dt$ это вектор частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.

Из теории матриц [2] известно свойство перемножаемости матричных экспонент (матриц Коши):

$$K(x_i \leftarrow x_0) = K(x_i \leftarrow x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1} \leftarrow x_{i-2}) \cdot \ldots \cdot K(x_2 \leftarrow x_1) \cdot K(x_1 \leftarrow x_0).$$

В случае, когда система дифференциальных уравнений имеет матрицу с переменными коэффициентами $A = A(x)$, решение задачи Коши предлагается, как это известно, искать при помощи свойства перемножаемости матриц Коши. То есть интервал интегрирования разбивается на малые участки и на малых участках матрицы Коши приближенно вычисляются по формуле для постоянной матрицы в экспоненте. А затем матрицы Коши, вычисленные на малых участках, перемножаются:

$$K(x_i \leftarrow x_0) = K(x_i \leftarrow x_{i-1}) \cdot K(x_{i-1} \leftarrow x_{i-2}) \cdot \ldots \cdot K(x_2 \leftarrow x_1) \cdot K(x_1 \leftarrow x_0),$$

где матрицы Коши приближенно вычисляются по формуле

$$K(x_{i+1} \leftarrow x_i) = e^{A(xi)\cdot\Delta xi} = \exp(A(x_i)\cdot\Delta x_i),$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Рассмотрим метод «переноса краевых условий» (прямой вариант метода) для решения краевых задач с нежесткими обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предлагается выполнять интегрирование по формулам теории матриц [2] сразу от некоторой внутренней точки интервала интегрирования к краям:

$$\boldsymbol{Y}(0) = K(0 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) + \boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x),$$

$$\boldsymbol{Y}(1) = K(1 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) + \boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x).$$

Подставим формулу для $\boldsymbol{Y}(0)$ в краевые условия левого края и получим

$$U\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{u},$$

$$U[K(0 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) + \boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x)] = \boldsymbol{u},$$

$$UK(0 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{u} - U\boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x).$$

Аналогично для правых краевых условий получаем

$$V\boldsymbol{Y}(1) = \boldsymbol{v},$$

$$V[K(1 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) + \boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x)] = \boldsymbol{v},$$

$$VK(1 \leftarrow x)\boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{v} - V\boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x).$$

То есть получаем два матричных уравнения краевых условий, перенесенные в рассматриваемую точку x:

$$[UK(0 \leftarrow x)] \cdot \boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{u} - U\boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x),$$

$$[VK(1 \leftarrow x)] \cdot \boldsymbol{Y}(x) = \boldsymbol{v} - V\boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x).$$

Эти уравнения перенесенных краевых условий с прямоугольными горизонтальными матрицами коэффициентов объединяются в одну систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов для нахождения решения $\boldsymbol{Y}(x)$ в любой рассматриваемой точке x:

$$\left\| \frac{UK(0 \leftarrow x)}{VK(1 \leftarrow x)} \right\| \cdot \boldsymbol{Y}(x) = \left\| \frac{\boldsymbol{u} - U\boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x)}{\boldsymbol{v} - V\boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x)} \right\|.$$

Рассмотрим метод «переноса краевых условий» (пошаговый вариант метода) для решения краевых задач с жесткими обыкновенными дифференциальными уравнениями. Полное решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\boldsymbol{Y}(x) = K(x \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_0)\,.$$

Или можно записать

$$\boldsymbol{Y}(0) = K(0 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}(x_1) + \boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x_1)\,.$$

Подставляем это выражение для $\boldsymbol{Y}(0)$ в краевые условия левого края и получаем

$$U\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{u}\,,$$

$$U[K(0 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}(x_1) + \boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x_1)] = \boldsymbol{u}\,,$$

$$UK(0 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}(x_1) = \boldsymbol{u} - U\boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x_1)\,.$$

Или получаем краевые условия, перенесенные в точку x_1:

$$U_1\boldsymbol{Y}(x_1) = \boldsymbol{u}_1\,,$$

где $U_1 = UK(0 \leftarrow x_1)$ и $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} - U\boldsymbol{Y}^*(0 \leftarrow x_1)$.

Далее запишем аналогично

$$\boldsymbol{Y}(x_1) = K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2)\,.$$

И подставим это выражение для $\boldsymbol{Y}(x_1)$ в перенесенные краевые условия точки x_1:

$$U_1\boldsymbol{Y}(x_1) = \boldsymbol{u}_1\,,$$

$$U_1[K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2)] = \boldsymbol{u}_1\,,$$

$$U_1K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) = \boldsymbol{u}_1 - U_1\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2)\,.$$

Или получаем краевые условия, перенесенные в точку x_2:

$$U_2\boldsymbol{Y}(x_2) = \boldsymbol{u}_2\,,$$

где

$$U_2 = U_1K(x_1 \leftarrow x_2)$$

и

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 - U_1\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2)\,.$$

И так в точку x^* переносим матричное краевое условие с левого края и таким же образом переносим матричное краевое условие с правого края. Покажем шаги переноса краевых условий правого края. Можем записать

$$\boldsymbol{Y}(1) = K(1 \leftarrow x_{n-1})\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) + \boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x_{n-1})\,.$$

Подставляем это выражение для $\boldsymbol{Y}(1)$ в краевые условия правого края и получаем

$$V\boldsymbol{Y}(1) = \boldsymbol{v}\,,$$

$$V[K(1 \leftarrow x_{n-1})\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) + \boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x_{n-1})] = \boldsymbol{v}\,,$$

$$VK(1 \leftarrow x_{n-1})\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) = \boldsymbol{v} - V\boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x_{n-1})\,.$$

Или получаем краевые условия правого края, перенесенные в точку x_{n-1}:

$$V_{n-1}\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) = \boldsymbol{v}_{n-1}\,,$$

где

$$V_{n-1} = VK(1 \leftarrow x_{n-1})$$

и

$$\boldsymbol{v}_{n-1} = \boldsymbol{v} - V\boldsymbol{Y}^*(1 \leftarrow x_{n-1})\,.$$

Далее запишем аналогично

$$\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) = K(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})\boldsymbol{Y}(x_{n-2}) + \boldsymbol{Y}^*(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})\,.$$

И подставим это выражение для $\boldsymbol{Y}(x_{n-1})$ в перенесенные краевые условия точки x_{n-1}:

$$V_{n-1}\boldsymbol{Y}(x_{n-1}) = \boldsymbol{v}_{n-1}\,,$$

$$V_{n-1}[K(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})\boldsymbol{Y}(x_{n-2}) + \boldsymbol{Y}^*(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})] = \boldsymbol{v}_{n-1}\,,$$

$$V_{n-1}K(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})\boldsymbol{Y}(x_{n-2}) = \boldsymbol{v}_{n-1} - V_{n-1}\boldsymbol{Y}^*(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})\,.$$

Или получаем краевые условия, перенесенные в точку x_{n-2}:

$$V_{n-2}\boldsymbol{Y}(x_{n-2}) = \boldsymbol{v}_{n-2}\,,$$

где $V_{n-2} = V_{n-1}K(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})$ и $\boldsymbol{v}_{n-2} = \boldsymbol{v}_{n-1} - V_{n-1}\boldsymbol{Y}^*(x_{n-1} \leftarrow x_{n-2})$.

И так во внутреннюю точку x^* интервала интегрирования переносим матричное краевое условие, как показано, и с левого края и таким же образом переносим матричное краевое условие с правого края и получаем

$$U^*\boldsymbol{Y}(x^*) = \boldsymbol{u}^*,\; V^*\boldsymbol{Y}(x^*) = \boldsymbol{v}^*.$$

Из этих двух матричных уравнений с прямоугольными горизонтальными матрицами коэффициентов очевидно получаем одну систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов:

$$\left\| \frac{U^*}{V^*} \right\| \cdot \boldsymbol{Y}(x^*) = \left\| \frac{\boldsymbol{u}^*}{\boldsymbol{v}^*} \right\|.$$

Известны формулы ортонормирования систем линейных алгебраических уравнений [2]. В случае «жестких» дифференциальных уравнений предлагается применять построчное ортонормирование матричных краевых условий в процессе их переноса в рассматриваемую точку [3, 5]. То есть, получив $U_1\boldsymbol{Y}(x_1) = \boldsymbol{u}_1$, применяем к этой группе линейных алгебраических уравнений построчное ортонормирование и получаем эквивалентное матричное краевое условие: $U_{1\text{орто}}\boldsymbol{Y}(x_1) = \boldsymbol{u}_{1\text{орто}}$. И теперь уже в это проортонормированное построчно уравнение подставляем

$$\boldsymbol{Y}(x_1) = K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2).$$

И получаем

$$U_{1\text{орто}}[K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2)] = \boldsymbol{u}_{1\text{орто}},$$

$$U_{1\text{орто}}K(x_1 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) = \boldsymbol{u}_{1\text{орто}} - U_{1\text{орто}}\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2).$$

Или получаем краевые условия, перенесенные в точку x_2:

$$U_2\boldsymbol{Y}(x_2) = \boldsymbol{u}_2,$$

где

$$U_2 = U_{1\text{орто}}K(x_1 \leftarrow x_2)$$

и

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_{\mathbf{1орто}} - U_{1\text{орто}}\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_2).$$

Теперь уже к этой группе линейных алгебраических уравнений применяем построчное ортонормирование и получаем эквивалентное матричное краевое условие:

$$U_{2\text{орто}}\boldsymbol{Y}(x_2) = \boldsymbol{u}_{2\text{орто}}.$$

И аналогично поступаем с промежуточными матричными краевыми условиями, переносимыми с правого края в рассматриваемую точку. В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов, состоящую из двух независимо друг от друга поэтапно проортонормированных матричных краевых условий, которая решается методом Гаусса с выделением главного элемента для получения решения $\boldsymbol{Y}(x^*)$ в рассматриваемой точке x^*:

$$\left\| \frac{U^*_{\text{орто}}}{V^*_{\text{орто}}} \right\| \cdot \boldsymbol{Y}(x^*) = \left\| \frac{\boldsymbol{u}^*_{\text{орто}}}{\boldsymbol{v}^*_{\text{орто}}} \right\|.$$

Вместо формулы для вычисления вектора частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде [5]

$$\boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_0) = e^{Ax}\int_{x0}^{x} e^{-At}\boldsymbol{F}(t)dt$$

предлагается использовать следующую формулу для каждого отдельного участка интервала интегрирования:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \boldsymbol{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i)\int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t)\boldsymbol{F}(t)dt.$$

Правильность приведенной формулы подтверждается следующим:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j - x_i) = \exp(A(x_j - x_i))\int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_i - t))\boldsymbol{F}(t)dt,$$

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j - x_i) = \int_{x_i}^{x_j} \exp(A(x_j - x_i + x_i - t))\boldsymbol{F}(t)dt,$$

$$\boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_i) = \exp(Ax)\int_{x_i}^{x} \exp(-At)\boldsymbol{F}(t)dt.$$

Вычисление вектора частного решения системы дифференциальных уравнений производится при помощи представления матрицы Коши под знаком интеграла в виде ряда и интегрирования этого ряда поэлементно:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \boldsymbol{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i)\int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t)\boldsymbol{F}(t)dt =$$

$$= K(x_j - x_i)\int_{x_i}^{x_j} (E + A(x_i - t) + A^2(x_i - t)^2 / 2! + ...)\boldsymbol{F}(t)dt =$$

$$= K(x_j - x_i)(E\int_{x_i}^{x_j} \boldsymbol{F}(t)dt + A\int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)\boldsymbol{F}(t)dt + A^2 / 2!\int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)^2 \boldsymbol{F}(t)dt + ...).$$

Эта формула справедлива для случая системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов A = const.

Рассмотрим вариант, когда шаги интервала интегрирования выбираются достаточно **малыми**, что позволяет рассматривать вектор $F(t)$ на участке $(x_j - x_i)$ приближенно в виде постоянной величины $F(x_i)$ = constant, что позволяет вынести этот вектор из-под знаков интегралов:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = K(x_j - x_i)(E\int_{x_i}^{x_j} dt + A\int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)dt + A^2 / 2!\int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)^2 dt + ...)\boldsymbol{F}(t).$$

Известно, что при $T = (at + b)$ имеем $\int T^n dt = \frac{1}{a(n+1)}T^{n+1} + \text{const}$ (при $n \neq -1$).

В нашем случае имеем $\int (b - t)^n dt = \frac{1}{(-1)(n+1)}(b - t)^{n+1} + \text{const}$ (при $n \neq -1$).

Тогда получаем $\int_{x_i}^{x_j} (x_i - t)^n dt = -\frac{1}{n+1}(x_i - x_j)^{n+1}$.

Тогда получаем ряд для вычисления вектора частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений на малом участке $(x_j - x_i)$:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = K(x_j - x_i) \cdot (E + A(x_i - x_j) / 2! + A^2(x_i - x_j)^2 / 3! + ...) \cdot (x_j - x_i) \cdot \boldsymbol{F}(x_i).$$

Для случая дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для каждого участка может использоваться осредненная матрица $A_i = A(x_i)$ коэффициентов системы дифференциальных уравнений. Если рассматриваемый участок интервала интегрирования **не мал**, то предлагаются следующие итерационные (рекуррентные) формулы. Приведем формулы вычисления вектора частного решения, например, $\boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0)$ на рассматриваемом участке $(x_3 \leftarrow x_0)$ через векторы частного решения $\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)$, $\boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)$, $\boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2)$ соответствующих подучастков $(x_1 \leftarrow x_0)$, $(x_2 \leftarrow x_1)$, $(x_3 \leftarrow x_2)$. Имеем $\boldsymbol{Y}(x) = K(x \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x \leftarrow x_0)$. Также имеем формулу для отдельного подучастка:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_j \leftarrow x_i) = \boldsymbol{Y}^*(x_j - x_i) = K(x_j - x_i)\int_{x_i}^{x_j} K(x_i - t)\boldsymbol{F}(t)dt.$$

Можем записать

$$\boldsymbol{Y}(x_1) = K(x_1 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0),$$

$$\boldsymbol{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}(x_1) + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

Подставим $\boldsymbol{Y}(x_1)$ в $\boldsymbol{Y}(x_2)$ и получим

$$\boldsymbol{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_1)[K(x_1 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)] + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) =$$

$$= K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

Сравним полученное выражение с формулой

$$\boldsymbol{Y}(x_2) = K(x_2 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_0)$$

и получим, очевидно, что

$$K(x_2 \leftarrow x_0) = K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)$$

и для частного вектора получаем формулу

$$\boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_0) = K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1).$$

То есть вектора подучастков $\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0), \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)$ не просто складываются друг с другом, а с участием матрицы Коши подучастка. Аналогично запишем $\boldsymbol{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}(x_2) + \boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2)$ и подставим сюда формулу для $\boldsymbol{Y}(x_2)$ и т.д.:

$$\boldsymbol{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_2)[K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)] +$$
$$+ \boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) +$$
$$+ K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + K(x_3 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) + \boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2).$$

Сравнив полученное выражение с формулой

$$\boldsymbol{Y}(x_3) = K(x_3 \leftarrow x_0)\boldsymbol{Y}(x_0) + \boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0),$$

очевидно, получаем, что

$$K(x_3 \leftarrow x_0) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)K(x_1 \leftarrow x_0)$$

и вместе с этим получаем формулу для частного вектора:

$$\boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0) = K(x_3 \leftarrow x_2)K(x_2 \leftarrow x_1)\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0) + K(x_3 \leftarrow x_2)\boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1) + \boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2).$$

То есть именно так и вычисляется частный вектор – вектор частного решения неоднородной системы дифференциальных уравнений, то есть так вычисляется, например, частный вектор $\boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_0)$ на рассматриваемом участке $(x_3 \leftarrow x_0)$ через вычисленные частные вектора $\boldsymbol{Y}^*(x_1 \leftarrow x_0)$, $\boldsymbol{Y}^*(x_2 \leftarrow x_1)$, $\boldsymbol{Y}^*(x_3 \leftarrow x_2)$ соответствующих подучастков $(x_1 \leftarrow x_0)$, $(x_2 \leftarrow x_1)$, $(x_3 \leftarrow x_2)$.

Взято из [2]. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений порядка n: $A\overline{x} = \overline{b}$. Здесь над векторами (как в первоисточнике) поставим черточки вместо их обозначения жирным шрифтом. Будем рассматривать строки матрицы A системы как векторы:

$$\overline{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}).$$

Ортонормируем эту систему векторов. Первое уравнение системы $A\overline{x} = \overline{b}$ делим на $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2}$. При этом получим

$$c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1,$$

$$\overline{c_1} = (c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n}),$$

где

$$c_{1k} = \frac{a_{1k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2}},\ d_1 = \frac{b_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{1k}^2}},\ \sum_{k=1}^{n} c_{1k}^2 = 1.$$

Второе уравнение системы заменяется на

$$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2,$$

$$\overline{c}_2 = \left(c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2n}\right),$$

где

$$c_{2k} = \frac{c_{2k}^{/}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{2k}^{/2}}},\ d_2 = \frac{d_2^{/}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{2k}^{/2}}},$$

$$c_{2k}^{/} = a_{2k} - \left(\overline{a}_2, \overline{c}_1\right)c_{1k},\ \ d_2^{/} = b_2 - \left(\overline{a}_2, \overline{c}_1\right)d_1.$$

Аналогично поступаем дальше. Уравнение с номером i примет вид

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n = d_i,\ \ \overline{c}_i = \left(c_{i1}, c_{i2}, \ldots c_{in}\right),$$

где

$$c_{ik} = \frac{c_{ik}^{/}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^{/2}}},\ d_i = \frac{d_i^{/}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_{ik}^{/2}}},$$

$$c_{ik}^{/} = a_{ik} - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_1\right)c_{1k} - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_2\right)c_{2k} - \ldots - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_{i-1}\right)c_{i-1k},$$

$$d_i^{/} = b_i - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_1\right)d_1 - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_2\right)d_2 - \ldots - \left(\overline{a}_i, \overline{c}_{i-1}\right)d_{i-1}.$$

Процесс будет осуществим, если система линейных алгебраических уравнений линейно независима. В результате мы придем к новой системе $Cx = \overline{d}$, где матрица C будет с ортонормированными строками, то есть обладает свойством $C \cdot C^T = E$, где E – это единичная матрица.

Уточнены формулы метода Виноградовых переноса краевых условий. Изложение выполнено так, что оно достаточно для выполнения программирования без необходимости получать матричные формулы из других источников. Изложенные формулы проверены расчетами тонкостенных оболочек вращения, в частности цилиндрической и сферической оболочек. Результаты проверочных расчетов совпали с результатами другого известного метода Виноградовых для решения жестких краевых задач. В ракетно-космической отрасли данный метод позволяет устранить известные сложности, связанные с проведением многопараметрического вычислительного процесса решения краевых задач. классическими методами и тем самым значительно сократить затраты расчетного времени. Следует отметить, что движение космического аппарата на активном участке, как правило, осуществляется с использованием заранее рассчитанной и заложенной в бортовой компьютер программы изменения вектора тяги двигательной установки по времени. Вместе с тем разработанный метод может быть положен в основу создаваемых адаптивных бортовых алгоритмов, позволяющих оперативно вносить коррекции в программу управления в зависимости от значений текущих параметров движения космического аппарата.

Список литературы

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том II, Государственное издательство физико-математической литературы. – Москва, 1962. – 635 с.

2. Виноградов А.Ю. Вычисление начальных векторов для численного решения краевых задач // Деп. в ВИНИТИ. – 1994. – № 2073-В94. – 15 с.

3. Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. Совершенствование метода прогонки Годунова для задач строительной механики // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1994. – № 4. – С. 187–191.

4. Виноградов А.Ю. Вычисление начальных векторов для численного решения краевых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1995. – Т. 35, № 1. – С. 156–159.

5. Виноградов А.Ю. Численное моделирование произвольных краевых условий для задач строительной механики тонкостенных конструкций // Тез. докладов Белорусского Конгресса по теоретической и прикладной механике «Механика-95». Минск, 6–11 февраля 1995 г., Гомель: Изд- во ИММС АНБ, 1995. – С. 63–64.

6. Виноградов А.Ю. Численное моделирование краевых условий в задачах деформирования тонкостенных конструкций из композиционных материалов // Механика Композиционных Материалов и Конструкций. – 1995. – Т. I, № 2. – С. 139–143.

7. Виноградов А.Ю. Приведение краевых задач механики элементов приборных устройств к задачам Коши для выбранной точки // Прикладная механика в приборных устройствах. Меж вуз. сб. научных трудов. – Москва: МИРЭА, 1996. – 219 с.

8. Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю. Простейший метод решения жестких краевых задач // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12–12. – С. 2569–2574.

9. Виноградов Ю.И., Виноградов А.Ю. Решение жестких краевых задач строительной механики (расчет оболочек составных и со шпангоутами) методом Виноградовых (без ортонормирования) // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1–1.; URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=17529.

10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.