УДК 004.94

МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Иванов В.Н., Полосков И.Е.

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», Пермь, e-mail: precol@psu.ru

Представлены результаты исследования по использованию метода модифицированных функций Лагранжа, предназначенного для численного решения задач оптимизации, для учета дополнительных голономных связей в механических системах. Изучены вопросы оценивания параметров этих функций, обеспечивающих движение механических систем вдоль дополнительных геометрических и кинематических связей с заданной точностью. Рассматриваемая методика учета таких связей позволяет расширить область применения алгоритмов численного моделирования, разработанных для систем связанных абсолютно твердых тел со структурой дерева, на системы с замкнутыми кинематическими цепями. Пригодность разработанных вычислительных процедур демонстрируется на примерах анализа двух конкретных механических систем. Приводится сравнение вычислительных затрат на моделирование с использованием предлагаемого метода и известных существующих схем учета дополнительных связей в механике. Результаты расчетов показывают, что рассматриваемый метод имеет определенные преимущества перед существующими.

Ключевые слова: механическая система, голономная связь, уравнения движения, численное интегрирование, модифицированная функция Лагранжа, математическое моделирование

METHOD OF THE MODIFIED LAGRANGE FUNCTIONS IN THE MECHANICAL SYSTEMS SIMULATION PROBLEM WITH ADDITIONAL CONSTRAINTS

Ivanov V.N., Poloskov I.E.

Perm State University, Perm, e-mail: precol@psu.ru

This paper presents results of research on taking into account of additional constraints in holonomic mechanical systems with the help of the modified Lagrange functions' method. This method was designed for a numerical solution of optimization problems. We solve problems to estimate parameters of these functions. The parameters guarantee that movements of mechanical systems occur along additional geometric and kinematic constraints with a given accuracy. Our technique of these constraints' accounting allows to extend applying of numerical simulation algorithms developed for multibody systems with tree structures to systems with closed kinematic chains. A suitability of the computational procedures developed is demonstrated by examples of analysis of two specific mechanical systems. We carry out a comparison of resource costs for computing simulation of the proposed method and known existing schemes taking into account additional constraints in mechanics. Results of calculations show that our method has certain advantages over existing ones.

Keywords: mechanical system, holonomic constraint, equations of motion, numerical integration, the modified Lagrangian function, mathematical modeling

В опытно-конструкторских работах при разработке новых изделий машиностроения широко используется компьютерное моделирование. На ранних стадиях такого проектирования исследуемую механическую систему обычно идеализируют системой связанных абсолютно твердых тел. Требование точности компьютерного моделирования приводит к необходимости увеличивать число тел, на которые разбивается механическая система. С ростом размерности математической модели увеличивается и трудоемкость моделирования. Поэтому разработка методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования, является актуальной задачей.

Известно, что система уравнений движения связки твердых тел является системой линейных дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) относительно различных групп переменных: обобщенных или декартовых ускорений тел системы, множителей Лагранжа, реакций связей, импульсов. Элементы матрицы системы уравнений в общем случае зависят от обобщенных координат и времени. На каждом шаге численного интегрирования необходимо разрешать эти уравнения относительно указанных групп переменных, что требует определенных вычислительных затрат, объем которых зависит от выбранного метода решения, количества ненулевых элементов матрицы системы и ее структуры в целом.

Математические модели механических систем со структурой дерева имеют рекуррентную структуру. Для них в настоящее время разработаны достаточно эффективные методы анализа: метод составных тел

для уравнений движения в форме уравнений Лагранжа II рода [5, 15], методы «прогонки» (отдельных тел) для расширенной системы общих уравнений динамики в декартовых координатах и уравнений движения в форме уравнений Лагранжа I рода [1, 5], настроенные на решение механических задач итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плотно заполненной или разреженной матрицей системы [2, 3] и др.

Однако структуры большинства моделей технических систем включают замкнутые циклы. Наличие дополнительных связей, порождающих замкнутые циклы, нарушает рекуррентную структуру уравнений движения и приводит к необходимости организации дополнительных матричных вычислений для исключения зависимых переменных в процессе интегрирования. Это влечет существенное увеличение времени, затрачиваемого на проведение вычислительных экспериментов.

Описываемая в данной работе новая методика учета дополнительных голономных связей, использующая технику модифицированных функций Лагранжа, позволяет включить в область применения эффективных алгоритмов численного моделирования, разработанных для систем со структурой дерева, системы с замкнутыми кинематическими цепями.

Постановка задачи

Требуется исследовать динамическое поведение механической системы (системы твердых тел), дифференциальные уравнения (ДУ) движения которой в обобщенных или абсолютных координатах имеют следующий вид:

$$M\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t), \tag{1}$$

где $q = q(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных (абсолютных) координат; $\dot{q} = dq/dt$ – вектор скоростей; $\dot{q} = d^2q/dt^2$ – вектор ускорений; $M = M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица инерции, $Q = Q(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор внешних и внутренних активных сил и сил инерции; n – число степеней свободы или число уравнений (1).

Пусть на систему наложено m дополнительных линейно-независимых голономных склерономных связей (m < n):

$$g(q) = 0, \tag{2}$$

где $g \in \mathbb{R}^m$ — дважды дифференцируемая вектор-функция.

Требуется найти частное решение системы уравнений (1) при заданных дополнительных ограничениях (2) с начальными условиями: $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.

В настоящее время для учета дополнительных связей при компьютерном моделировании динамики механических систем используются следующие методы (подробные обзоры по этому вопросу можно найти в работах [10, 14]): классический метод Лагранжа [15]; метод стабилизации связей Баумгарта [12, 15]; методы замены связей упруго-демпфирующими элементами (УДЭ) [4]; методы учета связей с помощью штрафных функций (ШФ) [11]; численные методы прямого интегрирования дифференциально-алгебраических систем уравнений (ДАУ) [6]; методы разделения координат q(t) на зависимые и независимые и проектирования уравнений на подпространства независимых координат [8] и др.

Среди основных недостатков указанных методов отметим следующие: необходимость решения дополнительных СЛАУ, возможность ухода со связей, появление нежелательных дополнительных высокочастотных малых колебаний в системе, искажение реакций связей и уменьшение скорости численных расчетов в результате дробления шага интегрирования.

Метод модифицированных функций Лагранжа

При выводе уравнений движения из принципа Гамильтона – Остроградского дополнительные связи можно учитывать методом модифицированных функций Лагранжа (МФЛ) в форме Пауэлла [13]. Тогда уравнения движения преобразуются к виду

$$M\dot{q} = Q - \alpha G^{T} (g + e), \qquad (3)$$

где $e \in R^m$ – вектор модифицированных $G = \frac{\partial g}{\partial q^T} \in R^{m \times n}$ – ма-

множителей Лагранжа; ∂q^{T} — матрица базиса многообразия ортогонального к множеству векторов, удовлетворяющих уравнениям связей (2); α — штрафной коэффициент.

Заметим, что в точке минимума действия по Гамильтону существует связь между обычными λ и модифицированными множителями Лагранжа *е* вида $\lambda = \alpha e$. Это означает, что для определения последних уравнения движения можно замкнуть дважды продифференцированными по времени уравнениями связей (2), как и в классическом варианте. При этом для стабилизации связей можно использовать метод Баумгарта. Таким образом, в окончательном виде система динамических уравнений включает в себя уравнения (3) и замыкающие уравнения:

$$G\ddot{q} = -2DG\dot{q} - Cg - \dot{G}\dot{q},\qquad(4)$$

где C, D – положительные диагональные матрицы коэффициентов жесткости и демпфирования колебаний невязок связей g(t) вокруг тривиального решения.

С другой стороны, для пересчета компонент вектора *е* можно использовать различные приближенные итерационные соотношения, например формулу с линейной скоростью сходимости

$$\dot{e} = k_u g(q) + k_w \ddot{g}(q),$$

где k_u , k_w – коэффициенты усиления обратной связи соответственно по нарушению и ускорению нарушения связей.

Если ввести новые переменные и:

$$u = g + k_u \int_0^t g \, dt \,,$$

то уравнения движения (3) преобразуются к виду

$$M\ddot{q} = Q - G^{T}(Au + B\dot{g}); \qquad (5)$$

$$\dot{a} = k_u g(q) + \dot{g}(q) = k_u g(q) + G\dot{q}, \quad (6)$$

где $A = \alpha k_{\mu}; B = \alpha k_{\mu}.$

Уравнения в форме (5), (6) можно рассматривать как уравнения системы автоматического регулирования, где управление выбирается в форме ПИД-регулятора [7]. Физически это означает, что к системе добавляются некоторые силовые элементы с управляемыми параметрами, которые за счет расширения фазового пространства позволяют обеспечить заданную точность моделирования.

Выбор параметров ПИД-регулятора

Настройка управляющих слагаемых в уравнениях (5), (6) заключается в подборе трех векторных параметров k_u , C, D. Для этого можно использовать какой-либо из стандартных методов теории автоматического регулирования, например метод Зиглера – Никольса [7].

Однако для решения поставленной задачи более пригодным оказывается другой подход. Пусть на механическую систему накладывается только одна дополнительная связь (2). Если из системы уравнений (5), (6) исключить компоненты вектора состояний механической системы, удалить внешнее силовое воздействие, а затем линеаризовать эту систему, то получим линейное однородное ДУ, описывающее собственные колебания модифицированного множителя Лагранжа *e*:

$$\ddot{e} + GM^{-1}G^T \left(B\ddot{e} + A\dot{e} + k_u Ae \right) = 0.$$
(7)

Потребуем, чтобы характеристическое уравнение для ДУ (7) имело вид

$$(k+\beta_0)\left[k+(\beta_1+i\nu)\right]\left[k+(\beta_1-i\nu)\right]=0, \quad (8)$$

где β_0 , β_1 – коэффициенты демпфирования; v – круговая частота регулятора. Предположим, что $v > v_{max}$, $\beta_0 = O(p v)$, $\beta_1 = O(p v)$, p = O(1), т.е. время переходного процесса в системе управления должно быть меньше, чем период наивысшей частоты колебаний механической системы. Сопоставляя характеристическое уравнение для ДУ (7) и уравнение (8), получаем следующие параметры ПИД-регулятора:

$$B = (GM^{-1}G^{T})^{-1} 3pv;$$

$$A = (GM^{-1}G^{T})^{-1} (3p^{2} + 1)v^{2};$$
 (9)

$$k_{u} = v (p^{3} + p) / (3p^{2} + 1).$$

Равенства (9) задают коэффициенты усиления обратной связи, демпфирующие и упругие параметры ПИД-регулятора (6).

С практической точки зрения преимущество уравнений (5), (6) заключается в том, что система уравнений (5) имеет ту же структуру, что и исходная система (1) без дополнительных связей. Это означает, что для ее разрешения относительно ускорений можно использовать те же методы, что и для исходной системы уравнений (1).

Уравнения (5), (6) построены таким образом, что при возникновении отклонений $\Delta g(q)$ изменяется в первую очередь ненапряженная длина дополнительного упруго-демпфирующего элемента $Au + B\dot{g}$ так, чтобы создаваемая этим элементом дополнительная сила обеспечивала скольжение механической системы по дополнительной связи $g(q) \approx 0$.

Вычислительные эксперименты

Эффективность различных подходов к учету дополнительных связей исследовалась на двух модельных механических системах: первая – двойной многозвенный математический маятник (рис. 1), вторая – квадратная решетка, составленная из связанных плоских пластин (рис. 2).



Рис. 1. Многозвенный маятник



Рис. 2. Решетка твердых тел

Сравнивались характеристики следующих методов: а – метод Лагранжа; b – метод Баумгарта; с – метод замены связей УДЭ; d – метод МФЛ и стабилизации связей по Баумгарту (МФЛ + Б), уравнения (3), (4); e – метод МФЛ с управляющими функциями (МФЛ + У), уравнения (5), (6).

Вычисления проводились в среде САВ Mathematica. Интегрирование уравнений движения выполнялось с помощью встроенной процедуры NDSolve с установленными по умолчанию параметрами. Заметим, что во всех случаях из-за наличия множителей Лагранжа эта процедура интегрировала предлагаемые уравнения как дифференциально-алгебраические. Поэтому в расчетах алгоритм интегрирования ДАУ отдельно не выделялся.

Первая система представляет собой два многозвенных математических маятника с четным числом тел (рис. 1), связанных невесомыми нерастяжимыми балками и упруго-демпфирующими связями между массами. В результате получается система с замкнутыми кинематическими цепями.

Уравнения движения для каждого маятника строились в форме уравнений Лагран-

жа II рода. Дополнительные связи были представлены в следующем виде:

$$g_{k}(q) = (x_{2k} - x_{4k})^{2} + (y_{2k} - y_{4k})^{2} - l^{2} = 0;$$

$$g_{k+n/2}(q) = (x_{2k} - x_{4k-1})^{2} + (y_{2k} - y_{4k-1})^{2} - l^{2} - h^{2} = 0,$$

$$k = 1, 2, ..., n/2,$$

где l – длина любого звена; h – расстояние между цепочками; $x_i = x_i(q)$; $y_i = y_i(q)$ – абсолютные декартовые координаты тел; $q = (q_1, ..., q_{2n})$ – вектор абсолютных углов отклонения звеньев от вертикали (обобщенных координат); 2n – число тел (точечных масс) в системе.

Обобщенные силы от упруго-демпфирующих связей в уравнениях были определены формулами вида

$$Q_{i} = -\sum_{k=1}^{n/2} \left[c p_{k}(q) + d \dot{p}_{k}(q) \right] \frac{\partial p_{k}(q)}{q_{i}}$$

$$i = 1, 2, ..., 2n,$$

где

$$p_k(q) = (x_{2k-1} - x_{4k-1})^2 + (y_{2k-1} - y_{4k-1})^2 - l^2.$$

Расчеты проводились для следующих значений параметров модели: n = 6, l = 1,8 м; h = 4 м; $m_i = 10$ кг; $c = 50\ 000$ H/м (коэффициент жесткости), d = 100 H·с/м (коэффициент демпфирования). Время моделирования составило 20 с.

Конструктивные параметры методов выбирались таким образом, чтобы в графических представлениях результатов расчетов переменных состояния механической системы, полученных разными методами, не наблюдалось значительных визуальных отличий.

На рис. 3 приведены графики колебаний нечетных звеньев маятника.

Следующий рисунок в логарифмическом масштабе (рис. 4) представляет графики невязок связей y = |g(t)|, полученных различными методами.

Графики на рис. 4 показывают, что:

a) метод Лагранжа приводит к постепенному сходу со связей;

б) наименее точным является метод УДЭ. Он хуже других методов справляется с компенсированием отклонений в положении звеньев системы, вызванных действием силы тяжести;

в) лучшие результаты показывают методы МФЛ и Баумгарта.



Рис. 3. Колебания нечетных звеньев маятников



Рис. 4. Графики невязок связей. Методы: а – Лагранжа; b – Баумгарта; с – УДЭ; d – МФЛ + Б; е – МФЛ + У

Таблица	ı 1
T	• •

					1
Метод	Лагранжа	Баумгарта	УДЭ	МФЛ + Б	МФЛ + У
Время, с	2,83	3,78	13,63	2,19	5,77

В табл. 1 представлены сведения о затратах компьютерного времени на моделирование системы 1 различными методами. Из анализа этой таблицы следует, что наиболее быстрым является метод МФЛ+Б, а самым медленным – метод УДЭ.

В качестве второй системы была выбрана квадратная решетка, состоящая из 40 одинаковых твердых тел в форме тонких квадратных пластин (рис. 2). На этом рисунке для наглядности изображена только часть решетки, содержащая 21 тело. Ширина каждой пластины равна a = 1/7 м, толщина -h = 0.01 м, масса -m = 1.25 кг. Каждое тело системы связано с соседними телами шаровыми шарнирами, расположенными в центрах боковых граней тел. В центре каждой группы из 9 звеньев решетки отсутствует одно тело, что обеспечивает статическую определенность всей системы. Первое тело системы закреплено шаровым шарниром в точке этого тела с координатами (-a/2,-a/20, 0) в абсолютной системе координат. В начальном положении решетка располагается в первой четверти плоскости *ОХҮ*. Ось *ОZ* направлена вниз вдоль направления действия силы тяжести.

Данная конструкция взята из работы [9]. Ранее она использовалась для сравнения эффективности программных комплексов «Универсальный механизм – UM», «ФРУНД», «EULER», предназначенных для моделирования систем твердых тел.

Для обеспечения жесткости всей конструкции в шаровых шарнирах, связывающих тела системы, заданы линейные упругодемпфирующие моменты с коэффициентами жесткости c = 100 Н·м/рад и демпфирования d = 0,01 Н·м·с/рад. Время моделирования составило 4 с.

Все шарниры в системе рассматривались как дополнительные связи. При отсутствии дополнительных связей каждое тело системы имело 6 степеней свободы, включая 3 линейные – абсолютные кообранаты центров тяжести тел $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ и 3 угловые – углы Эйлера $q_i = (\psi_i, \theta_i, \varphi_i)$.

Уравнения движения системы без связей строились в форме уравнений Лагранжа II рода, а уравнения дополнительных связей в шаровых шарнирах для рассматриваемой системы выглядели так:

$$g_{xjk} = r_j + I_j \cdot (a/2,0,0)^T - r_k + I_k \cdot (-a/2,0,0)^T = 0;$$

$$g_{yjk} = r_j + I_j \cdot (0, a/2,0)^T - r_k + I_k \cdot (0, -a/2,0)^T = 0;$$

$$g_1 = r_1 + I_1 \cdot (-a/2, -a/20,0)^T = 0,$$

где I_j – матрицы преобразования систем координат, связанных с телами в абсолютную систему координат. Индексы *j* и *k* перебираются по всем номерам соседних тел в решетке. Обобщенные силы от упруго-демпфирующих связей имеют вид



Рис. 5. Линейные колебания первых пяти звеньев системы



Рис. 6. Графики невязок связей. Методы: а – Лагранжа; b – Баумгарта; c – УДЭ; d – МФЛ + Б; e – МФЛ + У

Таблица 2

Метод	Лагранжа	Баумгарта	УДЭ	МФЛ + Б	МФЛ + У
Время, с	17,02	19,77	72,83	14,17	56,39

На рис. 5 приведены графики абсолютных линейных координат центров тяжести первых пяти тел системы.

На следующем рисунке (рис. 6) в логарифмическом масштабе представлены графики невязок дополнительных связей $y = [g_x(t)]$, описывающих первые четыре шарнира.

Графики на рис. 6 показывают, что:

a) метод Лагранжа приводит к постепенному сходу со связей;

б) наименее точным является метод замены связей упруго-демпфирующими элементами;

в) лучшие результаты показывают методы Баумгарта и МФЛ.

В табл. 2 представлены сведения о затратах компьютерного времени на моделирование системы 2 различными методами. Из анализа этой таблицы следует, что наиболее быстрым является метод МФЛ+Б, а самым медленным – метод УДЭ.

В результате проведенных численных экспериментов было установлено, что предлагаемый новый метод учета дополнительных связей в механических системах, основанный на модифицированных функциях Лагранжа и алгоритмах адаптивного управления, имеет определенные преимущества перед существующими схемами учета дополнительных связей.

Список литературы

 Верещагин А.Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1974. – № 6. – С. 89–94.

2. Иванов В.Н. Основные свойства обратного итерационного алгоритма решения систем линейных уравнений с положительно определенными матрицами // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13. – С. 366–376. 3. Иванов В.Н. Применение методов переменной метрики для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Вып. 3 (22). – С. 32–42.

4. Иванов В.Н. Применение метода модифицированных функций Лагранжа для учета дополнительных связей в механических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Вып. 4 (23). – С. 19–28.

5. Иванов В.Н., Домбровский И.В., Набоков Ф.В. и др. Классификация моделей систем твердых тел, используемых в численных расчетах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – № 2. – С. 139–155.

6. Arnold M., Fuchs A., Fuhrer C. Efficient corrector iteration for DAE time integration in multibody dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2006. – Vol. 195. – № 50–51. – P. 6958–6973.

7. Astrom K. J., Hagglund T. Advanced PID control. Research Triangle Park, NC: ISA – The Instrumentation, System, and Automation Society, 2006. - 460 p.

8. Blajer W. Geometrical interpretation of multibody dynamics: Theory and implementations // Virtual Nonlinear Multibody Systems / W.Schiehlen, M.Valášek (eds). – Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2003. – P. 17–36.

9. Boykov V., Gorobtsov A., Pogorelov D. Benchmarks for testing MBS software efficiency // Advances in Simulation of Multibody System Dynamics (EUROMECH Colloquium 495, Bryansk) / Book of Abstracts. – Bryansk State Technical University, 2008. – P. 19–20.

10. Jalon J. G., Bayo E. Kinematic and dynamic simulation of multibody systems. The real-time challenge. – New York: Springer-Verlag, 1994. – 440 p.

11. Mukharlyamov R.G. Stabilization of redundantly constrained dynamic system // Вестник РУДН. Серия математика, информатика, физика. – 2015. – № 1. – С. 60–72.

12. Nikravesh P.E. Some methods for dynamic analysis of constrained mechanical systems: A survey // Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics / E.J.Haug (ed.). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. – P. 351–368.

13. Nocedal J., Wright S.J. Numerical optimization. – Berlin: Springer, 2006. – 664 p.

14. Tseng F.-C., Ma Z.-D., Hulbert G.M. Efficient numerical solution of constrained multibody dynamics systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2003. – Vol. 192. – № 3–4. – Р. 439–472.

15. Wittenburg J. Dynamics of multibody systems. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 223 p.