УДК 514.82

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В МЕХАНИКЕ НЬЮТОНА

Подосенов С.А.

ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений», Москва, e-mail: Podosenov@mail.ru

Рассматривается движение разряженной сплошной среды в плоском пространстве Минковского в заданном силовом поле. При переходе в систему отсчета, связанную со средой, возникает *относительная кривизна пространства-времени*, обусловленная естественным требованием ортогональности гиперплоскости одновременности к линиям времени в случае ньютоновского приближения. Выяснилось, что точные решения уравнений Эйнштейна для изотропной космологической модели при плотности равной критической, следуют из решений уравнений Эйлера ньютоновской газодинамики. Ньютоновская теория оказалась более общей, чем общая теория относительности.

Ключевые слова: пространство-время, метрический тензор, системы отсчета, уравнения структуры, Минковский, Риман, Эйнштейн, лагранжевы координаты, эйлеровы координаты, Кристоффель, мировая линия, Ньютон, гиперповерхность

RELATIVE CURVATURE TENSOR OF CONTINUUM IN THE NEWTONIAN MECHANICS

Podosenov S.A.

FGUP «Russian Research Institute for Optical and Physical measurements», Moscow, e-mail: Podosenov@mail.ru

The discharged comtinuum motion in a flat Minkowski space in specified field of force in considered. When transiting to the reference frame connected with the medium the *relative space-time curvature* arises. This curvature is stipulated for natural demand of orthogonality of simultaneity hyperplane to base lines in case of the Newtonian approximation. It was discovered that exact solutions of Einstein equations for isotropic cosmological model at critical density follow from solutions of Euler equations of Newtonian gas dynamics. Newton theory proved to be more common then general relativity.

Keywords: space-time, metric tensor, reference frames equations of structure, Minkowski, Riemann, Einstein, Lagrangian coordinates, Eulerian coordinates, Kristoffel, world line, Newton, hypersurface

В [3] было показано, что описание движения сплошной среды в инерциальной системе отсчета (ИСО) и переход к неинерциальной (НСО) требует в общем случае выхода за рамки плоского пространства-времени. Это связано с заданием не только силового поля, действующего на частицы среды, но также и наложения условий на кинематические характеристики континуума с помощью уравнений структуры [3–7]. Эти уравнения связывают тензор Римана – Кристоффеля с тензорами скоростей деформаций, угловой скорости вращения и векторами первой кривизны мировых линий частиц среды. В результате система уравнений оказывается переопределенной и не реализуема в пространстве Минковского. Эта система разрешима при рассмотрении движения среды в римановом пространстве или в более общем случае в пространстве метрической связности. Если не накладывать на характеристики континуума дополнительных условий, а ограничиться лишь интегрированием уравнений движения, например, в плоском пространстве-времени, то никакого выхода за рамки плоского пространства-времени при стандартном переходе из ИСО к НСО не происходит. Однако если при переходе к сопутствующей среде системе в уравнениях движения для лагранжевых частиц с номерами $y^{\hat{k}}$ для вычисления расстояния между соседними частицами брать не проекцию полного дифференциала $x^n = \Psi^n(y^{\hat{k}}, t)$, от эйлеровых координат x^n на гиперплоскость одновременности, а дифференциал при фиксированном времени t, как это делается в классической механике [8], то получаем элемент квадрата интервала в синхронной системе в общей теории относительности (ОТО). Пространственное сечение при таком подходе будет плоским.

Анализ уравнений Эйлера и относительного тензора кривизны

Исследуем в ньютоновском приближении метрику пространства-времени для наблюдателей, движущихся вместе со средой. В этом приближении метрика сводится к виду

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \delta_{mn} \frac{\partial \Psi^m}{\partial y^{\hat{k}}} \frac{\partial \Psi^n}{\partial y^{\hat{l}}} dy^{\hat{k}} dy^{\hat{l}}. \quad (1)$$

В метрике (1) в качестве эйлеровых координат ИСО выбраны декартовы координаты, в которых $g_{mn} = -\delta_{mn}$, t – ньютоново абсолютное время. Следует отметить, что *метрика* (1) *в общем случае риманова с плоским пространственным сечением*. Этот результат на первый взгляд является неправдоподобным, однако метрика (1) допускает простое геометрическое и физическое толкование.

В качестве примера рассмотрим нежесткий стержень, элементы которого движутся вдоль оси стержня с разными скоростями. Вблизи стержня параллельно ему движется частица со скоростью, превосходящей скорости частиц стержня. Условимся, что наблюдатели на стержне в качестве времени используют часы ИСО пространства Минковского. Пусть показания часов, когда частица поравнялась с задним концом стержня, t_1, а в момент обгона часы показывали t_2. Время, затраченное на обгон, равно $(t_2 - t_1)$. Ясно, что *относительную длину мировой линии частицы*, при обгоне стержня, можно вычислить по теореме Пифагора. *Относительная длина мировой линии частицы*, когда стержень имеет бесконечно малые размеры, дается формулой (1). Элемент интервала (1) получается из псевдоевклидова интервала с помощью закона движения $x^n = \Psi^n(y^{\hat{k}}, t)$, а дифференциал от x^n вычисляется при фиксированном значении t, т.е. не является полным. Поэтому квадрат элемента интервала, получаемого вычитанием из квадрата временного элемента квадрата пространственного элемента, заданного в лагранжевой сопутствующей НСО, в общем случае приводит к неевклидову пространству-времени с плоским пространственным сечением.

Обычно при переходе из ИСО в НСО рассматривают *элемент абсолютной длины мировой линии частицы*. Элемент интервала получается из псевдоевклидова интервала с помощью закона движения $x^n = \Psi^n(y^{\hat{k}},\ t)$, а дифференциал от x^n является полным. Поэтому квадрат элемента (в отличие от (1)) содержит члены, зависящие от абсолютной скорости частицы, изменяется g_{00} компонента и появляются отличные от нуля g_{0k} компоненты метрического тензора. Однако пространство-время при этом остается плоским. Очевидно, что *абсолютная длина мировой линии рассматриваемой частицы* не равна *относительной длине мировой линии этой частицы*.

Пространственная метрика в лагранжевой сопутствующей НСО в согласии с (1) имеет вид

$$\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}} = \delta_{mn} \frac{\partial \Psi^m}{\partial y^{\hat{k}}} \frac{\partial \Psi^n}{\partial y^{\hat{l}}}. \qquad (2)$$

Как известно из механики сплошной среды [8]

$$\frac{d\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{dt} = 2\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}, \qquad (3)$$

где $\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}$ – тензор скоростей деформаций в сопутствующей СО. Так как лагранжевы $y^{\hat{k}}$ при движении каждой частицы остаются неизменными, то $\dfrac{dy^{\hat{k}}}{dt} = 0$, и поэтому

$$\frac{d\hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial y^{\hat{m}}} \frac{dy^{\hat{m}}}{dt} = \frac{\partial \hat{\gamma}_{\hat{k}\hat{l}}}{\partial t} = 2\hat{\sigma}_{\hat{k}\hat{l}}. \qquad (4)$$

Рассмотрим движение разряженного газа в ньютоновском поле тяжести, используя уравнение движения в форме Эйлера и уравнение неразрывности.

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} + v^k \frac{\partial v_a}{\partial x^k} = g_a; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\rho v^a\right) = 0. \qquad (5)$$

Дифференцируя уравнение (5) по x^b, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) + (\sigma_{kb} + \omega_{kb})(\sigma_{ak} + \omega_{ak}) + \\ + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) = \frac{\partial g_a}{\partial x^b}, \qquad (6)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma_{ab} + \omega_{ab}\right) + \left(\sigma_{kb} + \omega_{kb}\right)\left(\sigma_{ak} + \omega_{ak}\right) = \frac{\partial g_a}{\partial x^b}, \qquad (7)$$

где

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_a}{\partial x^b} + \frac{\partial v_b}{\partial x^a}\right);$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_a}{\partial x^b} - \frac{\partial v_b}{\partial x^a}\right). \qquad (8)$$

В (8) σ_{ab}, ω_{ab} – тензоры деформаций и угловой скорости вращения в нерелятивистской механике в переменных Эйлера. Рассмотрим случай, когда среда движется без вращений

$$\omega_{ab} = 0.$$

Свертывая (6) по a, b, получим в переменных Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\sigma}^{\hat{a}}_{\hat{a}} \hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{b}} \hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{k}} = \frac{\partial g_a}{\partial x^a}; \qquad (9)$$

$$\sigma_{ab} = \frac{\partial v_a}{\partial x^b} = \frac{\partial v_b}{\partial x^a}; \quad \frac{\partial \sigma^b_a}{\partial x^b} = \frac{\partial \sigma^b_b}{\partial x^a}.$$

Последнее соотношение в лагранжевых переменных сводится к виду

$$\hat{\nabla}_{\hat{b}} \hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{a}} - \hat{\nabla}_{\hat{a}} \hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{b}} = 0, \qquad (10)$$

где ковариантные производные вычисляются по метрике (2). Для вычисления тензора Риччи воспользуемся метрикой (1) и результатом [2] для синхронной системы отсчета с плоской пространственной метрикой.

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{0}} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}^{\hat{a}}_{\hat{a}} + \hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{k}}\right), \qquad (11)$$

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{a}} = \frac{1}{c}\left(\hat{\nabla}_{\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{a}} - \hat{\nabla}_{\hat{a}}\hat{\sigma}^{\hat{b}}_{\hat{b}}\right), \qquad (12)$$

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}\right) + \hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}}\hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{k}} - 2\hat{\sigma}^{\hat{k}}_{\hat{a}}\hat{\sigma}_{\hat{b}\hat{k}}\right). \qquad (13)$$

Можно показать, что при отсутствии вращений справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\sigma}_{\hat{a}\hat{b}} = \left(\frac{d\sigma_{kl}}{dt} + 2\sigma_{ml}\sigma_{mk}\right)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}, \qquad (14)$$

используя которое, имеем для выражения (13) соотношение

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\sigma_{kl}}{dt} + \sigma_{kl}\sigma^m_m\right)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}. \qquad (15)$$

Учитывая (7), находим при отсутствии вращений

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^l} + \sigma_{kl}\sigma^m_m - \sigma_{km}\sigma^m_l\right)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}. \qquad (16)$$

Среда, движущаяся в собственном поле тяжести, имеет $g_a = \frac{\partial\phi}{\partial x^a}$, где ϕ – потенциал поля тяжести, удовлетворяющий уравнению Пуассона. Из соотношений (9), уравнения Пуассона находим для (11)

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{0}} = \frac{4\pi k\rho}{c^2}. \qquad (17)$$

Соотношение (12) с учетом (10) дает

$$\hat{R}_{\hat{0}\hat{a}} = 0. \qquad (18)$$

Выражение (16) в совокупности с уравнением Пуассона представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\hat{R}_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{4\pi\rho k}{c^2}\hat{\gamma}_{\hat{a}\hat{b}} + \hat{F}_{\hat{a}\hat{b}};$$
$$\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = \left(\frac{\partial g^m}{\partial x^m}\delta_{kl} + \frac{\partial g_k}{\partial x^l} + \right. \qquad (19)$$
$$\left. + \sigma_{kl}\sigma^m_m - \sigma_{km}\sigma^m_l\right)\frac{\partial\Psi^k}{\partial y^{\hat{a}}}\frac{\partial\Psi^l}{\partial y^{\hat{b}}}.$$

Соотношения (17)–(19) при условии, что в последнем выражении $\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = 0$, представляют собой уравнения Эйнштейна, записанные в синхронной системе отсчета для пылевидной материи [2]. Очевидно, что в общем случае $\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} \neq 0$, так как в одном и том же силовом поле конгруенции мировых линий частиц среды обладают большим произволом.

Эквивалентность ОТО с теорией Ньютона

Выясним, при каких частных условиях геометрия НСО, определяемая законами ньютоновой механики, и геометрия синхронной системы отсчета для пылевидной материи, определяемая уравнениями Эйнштейна, совпадают. Из вида метрики (2) следует, что искомые решения уравнения Эйнштейна справедливы в случае плоских пространственных сечений. А совпадение решений уравнений Эйнштейна с решениями ньютоновской механики возможно, если на конгруенции мировых линий частиц базиса наложить ограничение

$$\hat{F}_{\hat{a}\hat{b}} = 0. \qquad (20)$$

Исследуем сферически-симметричные движения сплошной среды, поле скоростей которых в переменных Эйлера в декартовых координатах есть

$$v_a = v(r, t)n_a; \quad n_a = \frac{x_a}{r}; \quad n_a n_a = 1. \qquad (21)$$

Используя уравнения Эйлера (5), условия симметрии (21), получим для системы (20) выражение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta\phi; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \Delta\phi. \qquad (22)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения этой системы:

1. Для радиального движения разряженной среды в ньютоновском центрально-симметричном поле тяжести, создаваемом массивным телом, центр масс которого расположен в начале координат, имеем

$$\Delta\phi = 0; \quad \phi = -\frac{kM_0}{r};$$
$$v^2 = 2kM_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + v_0^2, \qquad (23)$$

где M_0 – масса тела, создающего поле; v_0 – значение скорости при $r = r_0$. Из совместности выражений (22) и (23) получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad v^2 = 2kM_0\frac{1}{r}. \qquad (24)$$

Решение (24) есть частный случай (23) при условии, что среда на бесконечности покоится. Интегрируя (24), получаем

$$r = \pm\left(\frac{3c}{2}\right)^{2/3} F^{1/3}(t_0 - t)^{2/3};$$

$$F \equiv \frac{2kM_0}{c^2} = r_g, \qquad (25)$$

где r_g – гравитационный радиус. Отметим, что в последнем соотношении скорость света c введена искусственно для удобства сравнения с другими результатами, и в результате в этой формуле она сокращается, как и должно быть при интегрировании уравнений движения в нерелятивистской механике. Выбор знака зависит от характера движения частиц. При движении по радиусу к центру выбирается знак «плюс», и знак «минус» – при расширении от центра. Постоянная t_0 выбирается из требования, что при $t = 0$ должно быть $r = r_0$, где r_0 – лагранжева координата. Очевидно, что при падении частиц на центр текущий радиус лагранжевой частицы $r(r_0, t)$ уменьшается поэтому $t < t_0$.

Метрика (1) в сферической системе координат имеет вид

$$dS^2 = c^2dt^2 - \left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\right)^2 dr_0^2 - - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \qquad (26)$$

Используя закон движения (25), полагая

$$R \equiv \frac{2}{3}\frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{r_g^{\frac{1}{2}}}, \qquad (27)$$

имеем для элемента интервала выражение

$$dS^2 = c^2dt^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - ct)\right]^{2/3}} - -\left[\frac{3}{2}(R - ct)\right]^{\frac{4}{3}} r_g^{\frac{2}{3}}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad (28)$$

которое в точности совпадает с известной метрикой Леметра в ОТО [2]. Для нашего случая элемент интервала метрики Леметра означает квадрат относительной длины мировой линии пробной частицы, движущейся относительно свободно падающих по радиусу к центру невзаимодействующих друг с другом частиц в ньютоновском центрально-симметричном поле тяжести. При этом падающие частицы, имеющие на бесконечности нулевую скорость, образуют базис НСО. Характер сил, действующих на пробную частицу, не имеет значения.

Хотя метрика (28) и тождественна с соответствующей метрикой из ОТО, однако в нашем случае координаты и время, определяющие метрику, имеют ясный метрический смысл, чего в принципе не может быть в ОТО. Например, время падения T частицы базиса от начального значения радиуса r_1 до текущего значения $r(r_1, T)$ является конечной величиной и определяется формулой

$$T = \frac{2}{3}\left[\frac{r_1}{c}\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{r}{c}\left(\frac{r}{r_g}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \qquad (29)$$

которая соответствует формуле из ОТО, когда в качестве времени используется собственное время частицы [1]. В нашем случае роль собственного времени играет ньютоновское время t.

2. Следуя работам [1, 2], рассмотрим ньютоновскую однородную изотропную космологическую модель, для которой имеем

$$v(r, t) = H(t)r. \qquad (30)$$

Систему (22), учтя уравнения Эйлера, запишем в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi k\rho;$$

$$\frac{3}{r}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{2v}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = -4\pi k\rho. \qquad (31)$$

Из уравнений (30), (31) находим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -4\pi k\rho; \quad \frac{\partial H}{\partial t} + H^2 = -\frac{4}{3}\pi k\rho. \qquad (32)$$

Откуда

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi k\rho, \qquad (33)$$

что соответствует случаю расширения при плотности равной критической. Так как закон эволюции Вселенной в ньютоновском приближении выведен в [1] для произвольной плотности, то воспользуясь результатами [1] для нашего случая, находим закон расширения

$$r = r_0\left(\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad (34)$$

где $(t_0 - t_\infty)$ – «возраст» однородной модели Вселенной. Подстановка (34) в (26) приводит к выражению для квадрата интервала

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \left(\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} \right)^{\frac{4}{3}} \times \qquad (35)$$
$$\times \left[dr_0^2 - r_0^{\,2} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right],$$

которое соответствует модели с плоским (евклидовым) пространством ОТО.

Заключение

Самым странным результатом, полученным в этой работе, является то, что точные решения уравнений Эйнштейна содержатся в качестве частных случаев нерелятивистской механики Ньютона, а не наоборот, как принято считать. Более подробные исследования релятивистской сплошной среды приведены в работах [9-12].

Список литературы

1. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1967.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.

3. Подосенов С.А. Геометрические свойства неинерциальных систем отсчета в релятивистской механике // Дискуссионные вопросы теории относительности и гравитации / под ред. В.И. Родичев, Н.В. Мицкевич. – М.: Наука, 1982. – С. 95–103.

4. Подосенов С.А. Пространство время и классические поля связанных структур. – М.: Компания «Спутник+», 2000.

5. Подосенов С.А., Потапов А.А., Соколов А.А.. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур. – М.: Изд-во «Радиотехника», 2003.

6. Подосенов С.А. Новый метод расчета полей в пространстве-времени связанных структур: монография. – LAP LAMBERT Academic Publishcing, 2011.

7. Подосенов С.А., Потапов А.А., Фоукзон Дж., Менькова Е.Р. Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии. В трех книгах. Книга 2. Силовые поля в связанных и неголономных структурах. – М.: ЛЕНАНД, 2015.

8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1970.

9. Podosenov S.A., Potapov A.A., Foukzon J., Men'kova E.R. Geometry of Noninertial Bases in Relativistic Mechanics Continua and Bell's Problem Solution // International Journal of Recent Advances in Physics IJRAP. Wireilla Scientific Publications. February. – 2014. – Vol. 3. – № 1. – P. 23–37.

10. Podosenov S.A., Foukzon J., Potapov A.A., Men'kova E.R. About Nonlinear Classic Field Theory of Connected Charges // International Journal of Recent Advances in Physics IJRAP. Wireilla Scientific Publications. – 31 May 2014. – Vol. 3. – № 2. – P. 1–20.

11. Podosenov S.A., Foukzon J., Potapov A.A., Men'kova E.R. About Modelling of the Gravitational Fields // International Journal of Recent Advances in Physics IJRAP. Wireilla Scientific Publications. – February 2015. – Vol. 4. – № 1. – P. 1–19.

12. Podosenov S.A., Foukzon J., Potapov A.A., Men'kova E.R. Classical and Quasi-classical Consideration of Charged Particles in Coulomb Field of Bounnd Charges // International Journal of Recent Advances in Physics IJRAP. Wireilla Scientific Publications. – February 2015. – Vol. 4. – № 1. – P. 67–89.