

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК НА РАВНОМЕРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Мусаев В.К.

МГМУ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассматривается исследование устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке. Применяется шаблон из девяти точек. С помощью метода конечных элементов дифференциальные уравнения в частных производных приведены к линейной задаче Коши с начальными условиями. С помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями приведена к явной двухслойной конечноэлементной линейной схеме в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек исследуемой области. За основные неизвестные в узле конечного элемента приняты два упругих перемещения и две скорости упругих перемещений. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях по пространственным координатам получены с помощью принципа возможных перемещений, то есть с помощью метода динамического равновесия внутренних и внешних сил. Аналитическое исследование устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на прямоугольной сетке показало, что она удовлетворяет условию устойчивости Неймана и Куранта.

Ключевые слова: математическое моделирование, задача с начальными и граничными условиями, задача Коши, численный метод, алгоритм, комплекс программ, конечные элементы первого порядка, прямоугольный конечный элемент, коэффициент Пуассона, модуль упругости, плотность, скорость распространения продольной волны, скорость распространения поперечной волны, устойчивость конечноэлементных схем, шаблон из девяти точек, характеристическое уравнение, условие Неймана, условие Куранта, шаг по временной координате

INVESTIGATION OF STABILITY OF EXPLICIT TWO-LAYER LINEAR FINITE ELEMENT SCHEMES FOR THE INTERNAL NODAL POINTS ON A UNIFORM RECTANGULAR GRID

Musaev V.K.

MSMU, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Deals with the study of the stability of two-dimensional explicit two-layer linear finite element schemes in the movements for the internal nodal points on a uniform rectangular grid. Used a template from nine points. Using the finite element method differential equation in partial derivatives is given to the linear Cauchy problem with initial conditions. Using a variant of the finite element method, Galerkin system of ordinary differential equations of the second order in the displacements with the initial conditions given by an explicit two-layer linear finite element scheme in the movements for internal and boundary nodal points in the study area. For the main unknown in the node of the finite element has two elastic displacements and two speeds of elastic displacements. The basic relation of the finite element method in the movements on the spatial coordinates is obtained using the principle of possible displacements, i.e. using the method of dynamic equilibrium of internal and external forces. Analytical investigation of the stability of two-dimensional explicit two-layer linear finite element schemes in the movements for the internal nodal points on a rectangular grid showed that it satisfies Neumann stability and the Courant.

Keywords: mathematical modeling, problem with initial and boundary conditions, the Cauchy problem, numerical method, algorithm, complex programs, finite elements of first order, finite element, Poisson's ratio, modulus of elasticity, density, speed of propagation of longitudinal waves, speed of propagation of transverse waves, stability of finite element schemes, the pattern of nine dots, the characteristic equation, the Neumann condition, the Courant condition, step on the time coordinate

Конечноэлементная схема позволяет задачу с бесконечным числом неизвестных привести к задаче с конечным числом неизвестных, решение которой принципиально возможно на вычислительных машинах.

С помощью конечноэлементной схемы получаем приближенное решение дифференциальной задачи, то есть задачи с начальными и граничными условиями.

Для выполнения условий устойчивости конечноэлементную схему нужно предста-

вить в виде некоторого линейного оператора в разные моменты времени. Условие устойчивости требует, чтобы собственные числа этого оператора не превосходили по модулю единицу в разные моменты времени. Если это условие не выполнено, тогда погрешности конечноэлементной схемы быстро возрастают и результат становится неприемлемым. Если это условие выполнено, тогда результат конечноэлементной схемы сходится к решению нестационарной волновой теории упругости.

Для оценки устойчивости конечноэлементной схемы применяется условие Куранта. Согласно условию Куранта скорость распространения возмущений в конечноэлементной схеме не должна быть меньше, чем в исходной дифференциальной задаче. Если это условие не выполнено, то результат конечноэлементной схемы не стремится к решению исходного дифференциального уравнения. Другими словами, за один шаг по времени возмущение не должно пробегать более одного конечного элемента.

Свойство устойчивости явной конечноэлементной схемы в основном зависит от величины шага по времени при сравнении с временами изучаемых физических нестационарных волновых процессов.

Некоторая информация о применяемом численном методе, алгоритме и комплексе программ приведена в следующих работах [1–10].

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке [3, 8, 9].

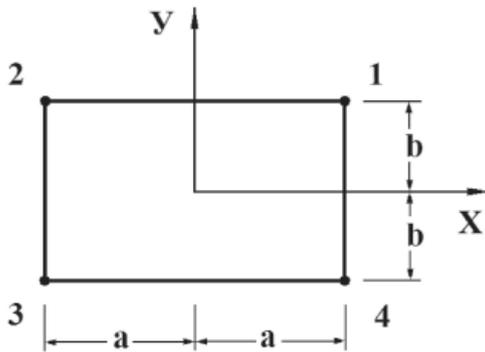


Рис. 1. Прямоугольный конечный элемент

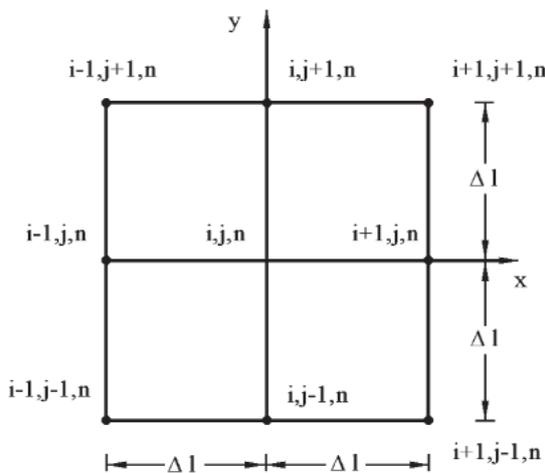


Рис. 2. Прямоугольная равномерная конечноэлементная сетка по пространственным координатам (шаблон из девяти точек)

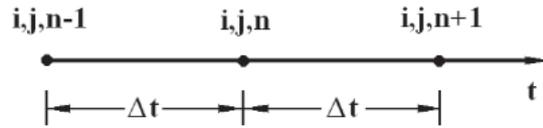


Рис. 3. Прямоугольная равномерная конечноэлементная сетка по временной координате

Используя основные соотношения для прямоугольного конечного элемента (рис. 1), покажем матрицу жесткости \bar{K} и вектор инерции для \bar{H} двумерного прямоугольного конечного элемента

$$\bar{K} = \rho h \begin{bmatrix} k_{1i,j} & k_{2i,j} \\ k_{3i,j} & k_{4i,j} \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\bar{H} = \rho abh \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

где

$$k_{1i,j} = \left(\frac{b}{a} C_p^2 P_{1i,j} + \frac{a}{b} C_s^2 P_{2i,j} \right);$$

$$k_{2i,j} = \left((C_p^2 - 2C_s^2) P_{3i,j} + C_s^2 P_{4i,j} \right);$$

$$k_{3i,j} = \left((C_p^2 - 2C_s^2) P_{4i,j} + C_s^2 P_{3i,j} \right);$$

$$k_{4i,j} = \left(\frac{a}{b} C_p^2 P_{2i,j} + \frac{b}{a} C_s^2 P_{1i,j} \right);$$

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{P}_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала;

$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; a – половина длины прямоугольного конечного элемента; b – половина высоты прямоугольного конечного элемента; h – толщина прямоугольного конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для некоторого деформируемого тела [1, 4–7], записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\Phi} + \bar{K}\dot{\Phi} = \bar{R}; \quad \dot{\Phi}|_{t=0} = \dot{\Phi}_0; \quad \Phi|_{t=0} = \Phi_0, \quad (3)$$

где \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\dot{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\ddot{\Phi}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; Φ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (3) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши.

Интегрируя по временной координате соотношение (3) с помощью конечноэлемент-

ного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i);$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}, \quad (4)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Исследуем на устойчивость явные конечноэлементные линейные схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных сетках с помощью метода Неймана [1–3, 8, 9].

Будем искать решение явных двухслойных конечноэлементных линейных схем в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных сетках в виде

$$u_{i,j,n} = GP^n e^{i\alpha i} e^{j\beta j}; \quad (5)$$

$$v_{i,j,n} = FP^n e^{i\alpha i} e^{j\beta j}, \quad (6)$$

где $i_1 = \sqrt{-1}$; G и F – константы; P – функция целых чисел α и β .

Рассмотрим устойчивость одномерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке (рис. 2–3).

Рассмотрим уравнение динамического равновесия (4) для узловой точки (i, j, n) через элементы матрицы жесткости (1) и вектора инерции (2) конечного элемента с четырьмя узловыми точками:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j,n+1} = \dot{u}_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{(H_1 + H_3 + H_5 + H_7)} & ((k_{1,1} + k_{3,3} + k_{5,5} + k_{7,7})u_{i,j,n} + \\ & + (k_{1,2} + k_{3,4} + k_{5,6} + k_{7,8})v_{i,j,n} + (k_{5,7} + k_{3,1})u_{i+1,j,n} + \\ & + (k_{5,8} + k_{3,2})v_{i+1,j,n} + k_{3,7}u_{i+1,j-1,n} + k_{3,8}v_{i+1,j-1,n} + \\ & + (k_{3,5} + k_{1,7})u_{i,j-1,n} + (k_{3,6} + k_{1,8})v_{i,j-1,n} + k_{1,5}u_{i-1,j-1,n} + \\ & + k_{1,6}v_{i-1,j-1,n} + (k_{1,3} + k_{7,5})u_{i-1,j,n} + (k_{1,4} + k_{7,6})v_{i-1,j,n} + \\ & + k_{7,3}u_{i-1,j+1,n} + k_{7,4}v_{i-1,j+1,n} + (k_{7,1} + k_{5,3})u_{i,j+1,n} + \\ & + (k_{7,2} + k_{5,4})v_{i,j+1,n} + k_{5,1}u_{i+1,j+1,n} + k_{5,2}v_{i+1,j+1,n}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_{i,j,n+1} = u_{i,j,n} + \Delta t \dot{u}_{i,j,n+1}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,j,n+1} = \dot{v}_{i,j,n} - \frac{\Delta t}{(H_2 + H_4 + H_6 + H_8)} & ((k_{2,1} + k_{4,3} + k_{6,5} + k_{8,7})u_{i,j,n} + \\ & + (k_{2,2} + k_{4,4} + k_{6,6} + k_{8,8})v_{i,j,n} + (k_{6,7} + k_{4,1})u_{i+1,j,n} + \\ & + (k_{6,8} + k_{4,2})v_{i+1,j,n} + k_{4,7}u_{i+1,j-1,n} + k_{4,8}v_{i+1,j-1,n} + \\ & + (k_{4,5} + k_{2,7})u_{i,j-1,n} + (k_{4,6} + k_{2,8})v_{i,j-1,n} + k_{2,5}u_{i-1,j-1,n} + \\ & + k_{2,6}v_{i-1,j-1,n} + (k_{2,3} + k_{8,5})u_{i-1,j,n} + (k_{2,4} + k_{8,6})v_{i-1,j,n} + \\ & + k_{8,3}u_{i-1,j+1,n} + k_{8,4}v_{i-1,j+1,n} + (k_{8,1} + k_{6,3})u_{i,j+1,n} + \\ & + (k_{8,2} + k_{6,4})v_{i,j+1,n} + k_{6,1}u_{i+1,j+1,n} + k_{6,2}v_{i+1,j+1,n}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$v_{i,j,n+1} = v_{i,j,n} + \Delta t \dot{v}_{i,j,n+1}. \quad (10)$$

Подставляя (1–2) и (5–6) в (7–10), получаем систему при $\cos \alpha = \sin \beta = 1$, которая имеет следующий вид:

$$G \left(\frac{\Delta l^2}{\Delta t^2} (-P + 2 - P^{-1}) - C_1 \right) - FC_2 = 0; \quad (11)$$

$$FC_2 + G \left(\frac{\Delta l^2}{\Delta t^2} (-P + 2 - P^{-1}) - C_1 \right) = 0, \quad (12)$$

где

$$C_1 = \frac{4}{3} (C_p^2 + C_s^2); \quad C_2 = (vC_p^2 + C_s^2).$$

Из (11) и (12) получим матрицу

$$\bar{\eta} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2} (-P + 2 - P^{-1}) - C_1, & -C_2 \\ -C_2, & \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2} (-P + 2 - P^{-1}) - C_1 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Раскрывая определитель матрицы $|\bar{\eta}| = 0$ в (13), получим характеристическое уравнение

$$(S - C_1)(S - C_1) = C_2^2; \quad (14)$$

$$S = \frac{\Delta l^2}{\Delta t^2} (-P + 2 - P^{-1}). \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) получим

$$P^2 - 2 \left(1 - \frac{15 - v}{12} \frac{C_p^2 \Delta t^2}{\Delta l^2} \right) P + 1 = 0. \quad (16)$$

Устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке (4) будет иметь место, если шаг по временной координате подчинить условию

$$\Delta t \leq h \frac{\Delta l}{C_p}, \quad (17)$$

где

$$h = \sqrt{\frac{12}{15 - v}} \quad (0,83 < h < 0,89).$$

Выводы

1. Рассматривается исследование устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке. Применяется шаблон из девяти точек. С помощью метода конечных элементов дифференциальные уравнения в частных производных приведены к линейной задаче Коши с на-

чальными условиями. С помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями приведена к явной двухслойной конечноэлементной линейной схеме в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек исследуемой области.

2. Аналитическое исследование устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на прямоугольной сетке показало, что она удовлетворяет условию устойчивости Неймана.

3. Шаг по временной координате при различных значениях коэффициента Пуассона изменяется от 0,83 до 0,89, то есть он удовлетворяет условию Куранта.

Список литературы

1. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности: автореф. дис. ... д-ра техн. наук / 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

2. Мусаев В.К. Об устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной треугольной сетке // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 2. – С. 59–65.

3. Мусаев В.К. Об устойчивости двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 3. – С. 69–75.

4. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

5. Мусаев В.К. О достоверности результатов численного метода решения сложных задач волновой теории упругости при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях // Ученые записки Российского государственного социального университета. – 2009. – № 5. – С. 21–33.

6. Мусаев В.К. Моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью метода вычислительной механики // Исследования по теории сооружений. – 2010. – № 2. – С. 44–52.

7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

8. Мусаев В.К. Теоретические исследования устойчивости явной двухслойной линейной схемы для внутренних узловых точек на равномерной прямоугольной сетке // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – № 3. – С. 69–73.

9. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 420 с.

10. Musayev V.K. Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area // International Journal Of Applied And Fundamental Research. – 2014. – № 2; URL: www.science-sd.com/457-24639.