

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДКРЕПЛЕННОМ КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

Мусаев В.К.

МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Рассматриваются некоторые вопросы численного определения волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии. Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями применяется метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения волновых задач теории упругости. Программный комплекс позволяет решать сложные задачи при нестационарных воздействиях на объекты сложной формы. Приводится сопоставление контурного напряжения с результатами аналитического решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, контурные напряжения, подкрепленное круглое отверстие, функция Хевисайда, динамическая теория упругости, перемещение, скорость перемещений, ускорение, метод конечных элементов, конечные элементы первого порядка, контурный конечный элемент, принцип возможных перемещений, однородный алгоритм, комплекс программ, узловые точки, явная двухслойная схема

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF NON-STATIONARY ELASTIC WAVES STRESSES IN REINFORCED ROUND HOLE

Musaev V.K.

MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

Discusses some of the issues of numerical determination of stress waves supported in a round hole. For the solution of two-dimensional planar dynamic problem of elasticity theory with initial and boundary conditions using the method of finite elements in the movement. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. The basic correlations of the finite element method is obtained using the principle of possible displacements. Based on the finite element method in the movements of the developed algorithm and software package for solving wave problems of elasticity theory. Software complex allows to solve complex problems in unsteady effects on complex objects. Contains the mapping of the grid voltages with the results of the analytical solution.

Keywords: mathematical modeling, contour voltage, supported by a round hole, the Heaviside function, the dynamic theory of elasticity, displacement, velocity, displacement, acceleration, finite element method, finite elements of the first order, the contour of the end element, principle of virtual displacements, the homogeneous algorithm, complex programs, anchor point, an explicit two-layer scheme

Постановка задачи при упругих волновых воздействиях

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Постановки, численные методы, технология программных комплексов и анализ результатов решения нестационарных динамических задач для областей сложной формы рассмотрены в работах [1–10].

Разработка методики и алгоритма

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Для решения линейных дифференциальных уравнений используем метод конечных элементов в перемещениях.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \bar{K}\vec{\Phi} = \vec{R}, \quad \vec{\Phi}|_{t=0} = \vec{\Phi}_0, \quad \dot{\vec{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \quad (1)$$

где $\bar{H}$ – диагональная матрица инерции; $\bar{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор внешних узловых упругих сил.

Интегрируя по временной координате соотношение (1) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t \vec{\Phi}_{i+1}. \quad (2)$$

Общая теория численных уравнений математической физики требует для этого наложения определенных условий на отношение шагов по временной координате Δt и по пространственным координатам, а именно

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узлов точек на квазирегулярных сетках исследуем с помощью численного эксперимента. Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узлов точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на уникальные сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

В работах [2–10] приведена информация о численном моделировании волн напряжений.

Определение нестационарных упругих волн напряжений в подкрепленном круглом отверстии

Рассматривается задача о воздействии плоской продольной упругой волны на подкрепленное круглое отверстие. Начальные условия приняты нулевыми. В сечении на расстоянии $1,6H$ (рис. 1) при $0 \leq n_1 \leq 10$ ($n_1 = t / \Delta t_1$) скорость упругого перемещения $\dot{u}_2$ изменяется линейно от 0 до $P_1 = \sigma_0 / (\rho_2 C_{p2})$, а при $n_1 > 10$ $\dot{u}_2 = P_1$. Внутренний контур подкрепленного отверстия $ABCD$ предполагается свободным от нагрузок при $t > 0$.

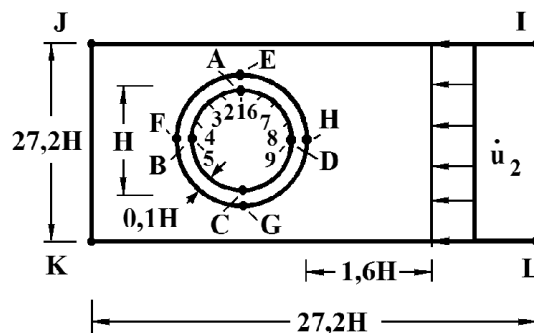


Рис. 1. Постановка задачи для подкрепленного круглого отверстия

На границе подкрепления и среды $EFGH$ приняты условия непрерывности перемещений. Граничные условия для контура $IJKL$ при $t > 0$ $u_2 = v_2 = \dot{u}_2 = \dot{v}_2 = 0$. Отраженные волны от контура $IJKL$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n_1 \leq 540$. Расчеты проведены при следующих исходных данных:

$$H = 0,2 \text{ м}; \Delta t_1 = 0,186 \cdot 10^{-5} \text{ с};$$

$$E_1 = 0,72 \cdot 10^5 \text{ МПа } (0,72 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2);$$

$$\nu_1 = 0,3;$$

$$\rho_1 = 0,275 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3 (0,275 \cdot 10^{-5} \text{ кгс·с}^2/\text{см}^4);$$

$$C_{p1} = 5364 \text{ м/с}; \Delta t_2 = 0,407 \cdot 10^{-5} \text{ с};$$

$$E_2 = 0,36 \cdot 10^4 \text{ МПа } (0,36 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2);$$

$$\nu_2 = 0,36;$$

$$\rho_2 = 0,122 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3 (0,122 \cdot 10^{-5} \text{ кгс·с}^2/\text{см}^4);$$

$$C_{p2} = 1841 \text{ м/с};$$

$$\sigma_0 = -0,1 \text{ МПа } (-1 \text{ кгс/см}^2)$$

($\dots_1$ – подкрепление; $\dots_2$ – среда).

Исследуемая расчетная область имеет 1536 узловых точек. Внутренний контур подкрепления аппроксимирован 28 узловыми точками. По толщине подкрепление аппроксимировано двумя узловыми точками.

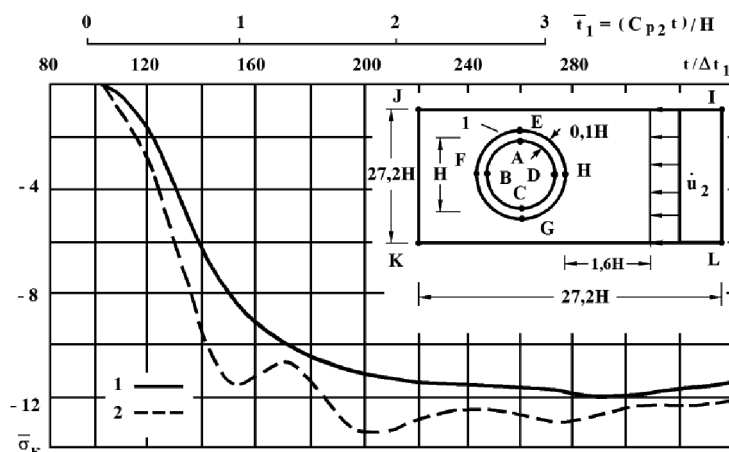


Рис. 2. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ на внутреннем контуре подкрепленного круглого отверстия при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда

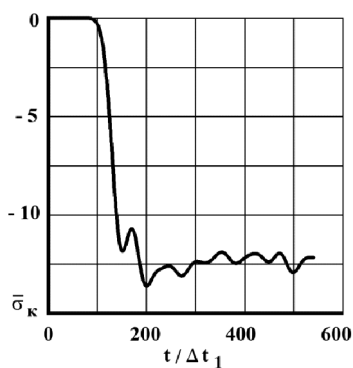


Рис. 3. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$

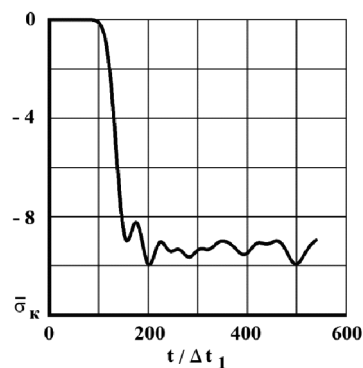


Рис. 4. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 2 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$

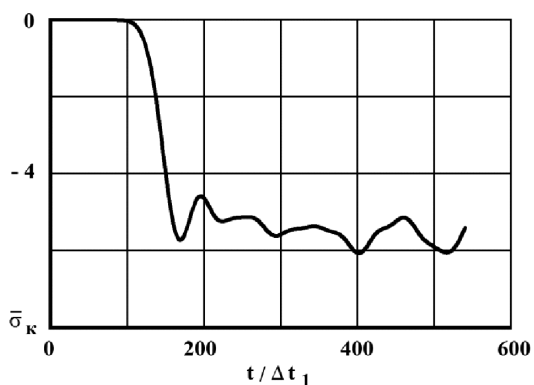


Рис. 5. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 3 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$

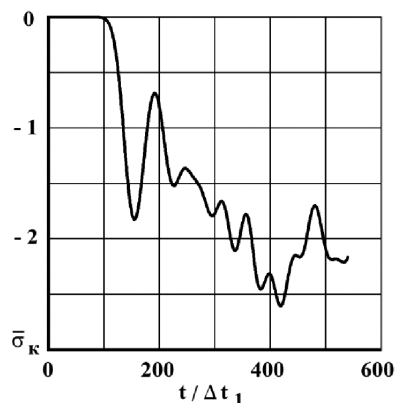


Рис. 6. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 4 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t / \Delta t_1$

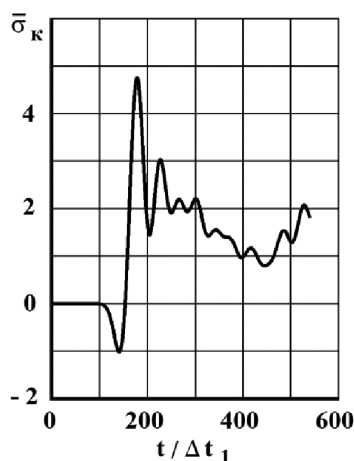


Рис. 7. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 5 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$

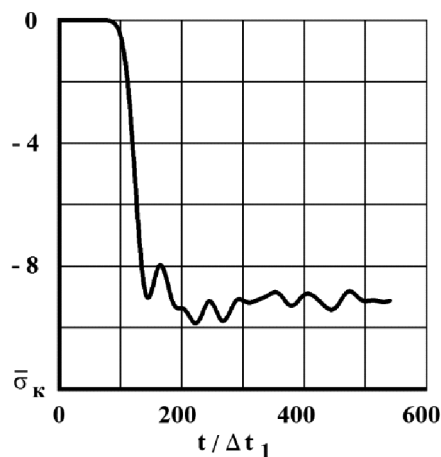


Рис. 8. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 6 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$

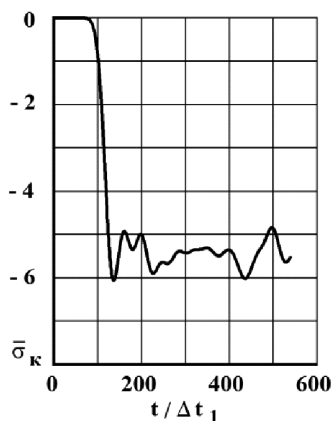


Рис. 9. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 7 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$

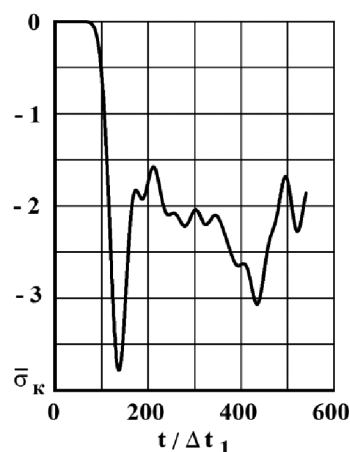


Рис. 10. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 8 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$

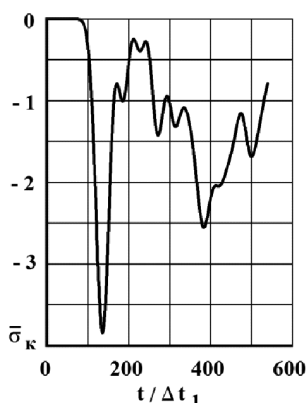


Рис. 11. Изменение упругого контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 9 на контуре подкрепленного круглого отверстия во времени $t/\Delta t_1$

На рис. 2 показано изменение контурного напряжения $\bar{\sigma}_k$ в точке 1 во времени $\bar{t}_1$ ($\bar{t}_1 = (C_{p2}t)/H$): 1 – результаты аналитического решения [1]; 2 – результаты численного решения, полученные методом конечных элементов [2, 4 и 6]. Расхождение для максимального упругого контурного напряжения составляет 12%. Результаты исследований показаны на рис. 3–11 в виде графиков изменения контурных напряжений $\bar{\sigma}_k$ ($\bar{\sigma}_k = \sigma_k / |\sigma_0|$) в точках 1–9 во времени $t/\Delta t_1$ при воздействии функции Хевисайда. Максимальной величины сжимающее контурное напряжение достигает в точке 1 почти за два прохода фронтом продольной волны диаметра среднего контура

подкрепленного круглого отверстия и равно $\sigma_k = -13,6$.

Вывод

Сравнение с результатами аналитического метода показало их хорошее совпадение, что позволяет сделать заключение о физической достоверности результатов численного решения волновых задач.

Список литературы

1. Гернет Х., Крузе-Паскаль Д. Неустановившаяся реакция находящегося в упругой среде кругового цилиндра произвольной толщины на действие плоской волны расширения // Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков. – Сер. Е. – 1966. – Т. 33, № 3. – С. 48–60.
2. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Прикладная математика и информатика». – 1997. – № 1. – С. 87–110.
3. Мусаев В.К. О разрушениях в сложных деформируемых телах вызванных импульсными воздействиями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 36–42.
4. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.
5. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.
6. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
7. Мусаев В.К. Математическое моделирование интерференции нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4; URL: www.science-education.ru/118-14118 (дата обращения: 21.09.2014).
8. Мусаев В.К. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (часть 7). – С. 1466–1470; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10004353 (дата обращения: 21.09.2014).
9. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11 – С. 10–14.

10. Мусаев В.К. Математическое моделирование напряженного состояния технических объектов с помощью волновой теории сейсмической безопасности // Проблемы безопасности российского общества. – 2014. – № 3–4. – С. 206–218.

References

1. Gernet K., Kruze-Paskal D. Neustanovivshayasya reaktsiya nakhodyashchegosya v uprugoy srede krugovogo tsilindra proizvolnoy tolshchiny na deystvie ploskoy volny rasshireniya // Prikladnaya mekhanika. Trudy amerikanskogo obshchestva inzhenerov-mekhanikov. – Ser. E. – 1966. – T. 33, № 3. – pp. 48–60.
2. Musaev V.K. Chislennoe reshenie volnovykh zadach teorii uprugosti i plastichnosti // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya prikladnaya matematika i informatika. – 1997. – № 1. – pp. 87–110.
3. Musaev V.K. O razrusheniyakh v slozhnykh deformiruemykh telakh vyzvannykh impulsnyimi vozdeystviyami // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoy bezopasnosti. – 2006. – № 1. – pp. 36–42.
4. Musaev V.K. Ob otsenke dostovernosti i tochnosti chislenno go resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh zadach // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoy bezopasnosti. – 2007. – № 3. – pp. 48–60.
5. Musaev V.K. Chislennoe, analiticheskoe i eksperimentalnoe reshenie zadachi o kontsentratsii nestatsionarnykh dinamicheskikh napryazheniy v svobodnom kruglom otverstii // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoy bezopasnosti. – 2008. – № 4. – pp. 67–71.
6. Musaev V.K. Otsenka dostovernosti i tochnosti rezultatov vychislitel'nogo eksperimenta pri reshenii zadach nestatsionarnoy volnovoy teorii uprugosti // Nauchnyy zhurnal problem kompleksnoy bezopasnosti. – 2009. – № 1. – pp. 55–80.
7. Musaev V.K. Matematicheskoe modelirovanie interferentsii nestatsionarnykh uprugikh voln napryazheniy v vide treugol'nogo impulsa ot svobodnoy poverkhnosti plastinki / V.K. Musaev, S.V. Sitnik, A.A. Tarasenko, V.G. Sitnik, M.V. Zyubina // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. – 2014. – № 4. – URL: www.science-education.ru/118-14118 (data obrashcheniya: 21.09.2014).
8. Musaev V.K. Matematicheskoe modelirovanie otrazheniya nestatsionarnykh uprugikh voln napryazheniy v vide treugol'nogo impulsa ot svobodnoy poverkhnosti plastinki / V.K. Musaev, S.V. Sitnik, A.A. Tarasenko, V.G. Sitnik, M.V. Zyubina // Fundamentalnye issledovaniya. – 2014. – № 9 (chast 7). – pp. 1466–1470; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10004353 (data obrashcheniya: 21.09.2014).
9. Musaev V.K. O dostovernosti kompyuternogo modelirovaniya nestatsionarnykh uprugikh voln napryazheniy v deformiruemykh telakh slozhnoy formy // Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy. – 2014. – № 11 – pp. 10–14.
10. Musaev V.K. Matematicheskoe modelirovanie napryazhennogo sostoyaniya tekhnicheskikh obektov s pomoshchyu volnovoy teorii seysmicheskoy bezopasnosti // Problemy bezopasnosti rossiyskogo obshchestva. – 2014. – № 3–4. – pp. 206–218.