УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ВОЛНОВОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ГЕООБЪЕКТАХ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА, АЛГОРИТМА И КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ МУСАЕВА В.К.

Спиридонов В.П.

Московский государственный машиностроительный университет, Москва, e-mail: svp-vak@mail.ru

В работе приводится информация о математическом моделировании нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых объектах сложной формы. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. С помощью метода конечных элементов в перемещениях линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения. Рассмотрены некоторые закономерности волнового напряженного состояния геообъектов.

Ключевые слова: моделирование, нестационарные волны, численный метод Мусаева В.К., перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, конечные элементы первого порядка, методика, алгоритм, комплекс программ, геообъекты

IDENTIFICATION OF SOME REGULARITIES OF WAVE STRESS STATE IN THE GEO OBJECTS USING NUMERICAL METHOD, ALGORITHM AND PROGRAM COMPLEX MUSAYEV V.K.

Spiridonov V.P.

Moscow State University of Mechanical Engineering, Moscow, e-mail: svp-vak@mail.ru

The paper provides information on the mathematical modeling of non-stationary elastic waves of stresses in deformable objects of complex shape. For solving two-dimensional nonstationary dynamic problems of mathematical elasticity theory with initial and boundary conditions using the finite element method in displacements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. The basic relations of the finite element method is obtained by using principle of possible displacements. Using the method of finite elements in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions led to a linear Cauchy problem. On the basis of the finite element method in displacements the developed algorithm and the program complex for solving linear flat two-dimensional problems, which allow solving difficult tasks in non-stationary dynamic loads on structures. Considered some regularities of wave stress state of the geoobjects.

Keywords: modeling, transient waves, a numerical method Musayev V.K., displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, theory of elasticity, boundary value problem, the problem with the initial conditions, finite elements of first order, method, algorithm, software complex, geoobjects

В работах приведена информация о распространении нестационарных волн в деформируемых областях различной формы [3, 6, 7, 8].

Импульсное воздействие характеризуется внезапностью приложения и кратковременностью действия, измеряемого микросекундами. Интенсивность их достаточно велика, для того чтобы произвести разрушение и большие необратимые изменения в теле, на которые они действуют.

В деформируемом теле при импульсном воздействии возникают возмущения различной природы. Они распространяются с конечными скоростями. Величина возмущений зависит от состояния тела и характера деформаций, в виде волн возмущений, называемых волнами напряжений. Возмущения, распространяясь в теле, образуют области, которые расширяются с течением времени и ограничены частью поверхности тела и поверхностью фронта волны напряжений.

Каждой области возмущений соответствует свое напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тензором напряжений и тензором деформаций. Области возмущений можно разделить на первичные и вторичные. Первичной является область возмущений волны нагрузки. Области возмущений волн разгрузки и отраженных будут вторичными. Они всегда находятся внутри области возмущений волны нагрузки и являются областями с начальными напряжениями и деформациями.

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что при-

водит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

Напряженное состояние волнового нагруженного тела может изменяться так быстро, что возникающие деформации и разрушения еще не успевают распространиться, как распределение напряжений изменится, так как скорости распространения волн напряжений достигают 6000 м/с, а нарушение прочности распространяется со скоростью не более 1500 м/с.

При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Математическое моделирование волн напряжений в сложных областях с помощью численного метода, алгоритма и комплекса программ Мусаева В.К. рассмотрено в следующих работах [1–10].

Для решения краевой задачи используем метод конечных элементов в перемещениях. Задачи решаются методом сквозного счета, без выделения разрывов (однородный алгоритм). Основное внимание будет обращено на решение линейной задачи, так как исходные данные являются приближенными.

С помощью метода конечных элементов краевая задача заменяется задачей Коши. Далее задачи решаются с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Для аппроксимации по пространственным переменным применяются треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений.

Для аппроксимации по временной переменной применяются линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Предложен способ вычисления напряжения на границе области, свободной от нагрузок. За основные неизвестные в узловой точке приняты два перемещения и две скорости перемещений для линейной задачи, а для нелинейной задачи появляется дополнительная переменная – начальные напряжения в центре тяжести конечного элемента.

С помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями приведена к явной двухслойной конечноэлементной линейной и нелинейной схеме в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек.

С помощью предельного перехода показано, что одномерная явная двухслойная конечноэлементная линейная схема в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной линейной сетке сходится к дифференциальному уравнению равновесия одномерной динамической задачи теории упругости в перемещениях, а двумерная явная двухслойная конечноэлементная линейная схема в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных треугольной и прямоугольной сетках сходится к дифференциальным уравнениям равновесия двумерной плоской динамической задачи теории упругости в перемещениях.

Аналитическое исследование устойчивости одномерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерной линейной сетке и двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних узловых точек на равномерных треугольной и прямоугольной сетках показало, что они удовлетворяют условию устойчивости Неймана.

С помощью численного эксперимента получены устойчивые двумерные явные двухслойные конечноэлементные линейная и квазилинейная схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Для получения упругого перемещения, скорости перемещений, ускорений и напряжений при воздействии произвольного вида применяется интеграл Дюамеля: интегрирование осуществляем методом трапеций, а дифференцирование с помощью односторонней разности.

Предложен квазирегулярный подход к решению систем линейных и квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями и к аппроксимации исследуемой области.

Методика основывается на схемах: точка, линия, плоскость. Предложенный подход позволяет значительно сократить объем вводимых данных и время, необходимое для решения задач. Кусочно-линейная аппроксимация начального участка при воздействии типа функции Хевисайда умень-

шает осцилляции результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

При воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда максимальное растягивающее упругое контурное напряжение возникает:

– для свободного квадратного отверстия в точке, находящейся на оси симметрии в освещенной области контура;

– для выреза треугольного профиля в точке, находящейся в теневой области контура на высоте 0,83H (H – высота выреза);

– для подкрепленного круглого отверстия в точке, находящейся на оси симметрии в теневой области внутреннего контура подкрепления;

– для подкрепленного квадратного отверстия в точке, находящейся на оси симметрии в освещенной области внутреннего контура подкрепления;

– для гравитационной плотины нормального профиля (Курпсайская плотина) в точке, находящейся в задней области контура на высоте 0,82H (H – высота плотины);

– для плотины треугольного профиля (Андижанская плотина) в точке, находящейся в задней области контура на высоте 0,45H;

– для гравитационной плотины облегченного профиля (плотина Койна) в точке, находящейся в задней области контура на высоте 0,63H.

В свободном круглом отверстии, в свободном квадратном отверстии, в вырезе треугольного профиля, в подкрепленном круглом отверстии и в подкрепленном квадратном отверстии – величина максимального сжимающего упругого контурного напряжения при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда больше, чем при воздействии плоской продольной упругой волны типа полупериода синусоиды.

В плотине треугольного профиля (Андижанская плотина), профиль которого изменяется плавно, – величина максимального растягивающего упругого контурного напряжения при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда больше, чем при воздействии плоской продольной упругой волны типа полупериода синусоиды.

В гравитационной плотине нормального профиля (Курпсайская плотина) и в гравитационной плотине облегченного профиля (плотина Койна), в профилях которых имеются области с резким изменением сечения, – величина максимального растягивающего упругого контурного напряжения при воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда меньше, чем при воздействии плоской продольной упругой волны типа полупериода синусоиды.

При воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда на свободное круглое отверстие, на свободное квадратное отверстие и на вырез треугольного профиля – сжимающее упругое контурное напряжение максимальной величины достигает не более, чем за три прохода фронтом волны характерного размера.

При воздействии плоской продольной упругой волны типа полупериода синусоиды на свободное круглое отверстие, на свободное квадратное отверстие и на вырез треугольного профиля – сжимающее упругое контурное напряжение максимальной величины достигает не более, чем за семь проходов фронтом волны характерного размера.

При воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда и типа полупериода синусоиды на подкрепленное круглое отверстие и на подкрепленное квадратное отверстие – сжимающее упругое контурное напряжение максимальной величины достигает не более, чем за три прохода фронтом волны характерного размера.

При воздействии плоской продольной упругой волны типа функции Хевисайда и типа полупериода синусоиды на гравитационную плотину нормального профиля (Курпсайская плотина), на плотину треугольного профиля (Андижанская плотина) и на гравитационную плотину облегченного профиля (плотина Койна) – растягивающее упругое контурное напряжение максимальной величины достигает не более, чем за четыре прохода фронтом волны характерного размера. Упругое контурное напряжение на гранях плотин является почти зеркальным отображением одна другой, то есть антисимметричным.

В работах [4–8, 10] приведена информация о верификации результатов рассматриваемого численного метода, алгоритма и комплекса программ.

Автор выражает благодарность Мусаеву В.К. за оказанную помощь и внимание к работе.

Список литературы

1. Дикова Е.В., Сущев Т.С., Спиридонов В.П., Юзбеков Н.С., Тарасенко А.А. Определение упругих волн напряжений в защитном сооружении от ударной волны лавины с помощью численного метода Мусаева В.К. // Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXII Международной конференции. – М.: РГГУ, 2014. – С. 216–219.

2. Мусаев В.К. Математическое моделирование поверхностных волн напряжений в задаче Лэмба при воздей-

ствии в виде дельта-функции // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 2 (часть 1). – С. 25–30.

3. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.

4. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

5. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

6. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

7. Мусаев В.К. Оценка точности и достоверности численного моделирования при решении задач об отражении и интерференции нестационарных упругих волн напряжений // Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1 (часть 7). – С. 1184–1187.

8. Мусаев В.К. Численное моделирование динамического напряженного состояния сооружений уравнениями двумерной теории упругости и пластичности. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 01.02.04. – М.: Совинтервод, 1993. – 46 с.

9. Мусаев В.К. Численное моделирование упругих сейсмических волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 4. – С. 6–22.

10. Мусаев В.К. Численное, аналитическое и экспериментальное решение задачи о концентрации нестационарных динамических напряжений в свободном круглом отверстии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 4. – С. 67–71.