УДК 51 (075.8) + 373. 167. 372.85

АНАЛОГИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПОНЯТИЯМ. МЕТОД АНАЛОГИЙ

[1]Юнусов А.А., [2]Жохов А.Л., [3]Юнусова А.А.

[1]Международный гуманитарно-технический университет, Шымкент, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;
[2]ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», Ярославль, e-mail: zhal1@mail.ru;
[3]Евразийский гуманитарний институт, Астана, e-mail: altyn_79@mail.ru

В практике обучения аналогия используется, как правило, на интуитивной основе, как некоторый вид сходства между двумя, в значительной степени неопределёнными объектами. Это нередко приводит к ошибочным заключениям об изучаемом объекте, о чём писали такие методисты, как Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев и другие. В статье даётся не традиционный подход к осмыслению и трактовке аналогии с позиций использования элементов высшей математики, а именно такой, как алгебраическая система, гомоморфизм и его частные случаи. На этой основе строится описание такого распространённого метода познания действительности, как аналогия, относимая логиками к так называемым традуктивным методам рассуждений. Такой подход позволяет в некоторой степени алгоритмизировать процесс использования метода и применять его, по меньшей мере, учителю, уже, во-первых, вполне осознанно и, во-вторых, как метод исследования объекта познания в самостоятельных исследованиях и в процессе обучения. В заключение даётся схема метода аналогий с выделенной внутри него системой действий, успешно прошедших апробацию в рамках школьного обучения.

Ключевые слова: обучение, аналогии, процесс обучения, набор характеристик, формирование математических понятий, необходимые действия, мышление, арифметические действия, изоморфизм, символическая модель

ANALOGY FROM THE POINT OF VIEW OF HIGHER MATHEMATICS AND POSSIBILITY OF HER USE IN THE PROCESS OF EDUCATING TO MATHEMATICAL CONCEPTS. METHOD OF ANALOGIES

[1]Yunusov A.A., [2]Zhohov A.L., [3]Yunusova A.A.

[1]International gumj-technical universiny, Shymkent, e-mail: Yunusov1951@mail.ru;
[2]GOU VPO «Yaroslavl State Pedagogical University K.D. Ushinskogo», Yaroslavl, e-mail: zhal1@mail.ru;
[3]Eurasian Institute for the Humanities, Astana, e-mail: altyn_79@mail.ru

In practice of educating an analogy is used, as a rule, on intuitional basis, as some type of likeness between two, largely by indefinite objects. It quite often results in erroneous conclusions about the studied object, what such methodists wrote about, as Ю.М. Колягин, П.М. Эрдниев et al. In the article the not traditional suiting is given to the comprehension and interpretation of analogy from positions of the use of elements of higher mathematics, namely such, as an algebraic system, homomorphism and his special cases. On this basis description of such widespread method of cognition of reality, as analogy taken by logicians to the so-called традуктивным methods of reasoning, is built. Such approach allows aught the алгоритмизировать process of the use of method and to apply him, at least, to the teacher, already, firstly, fully consciously, and, secondly, as a method of research of object of cognition in independent researches and in the process of educating. In conclusion the chart of method of analogies is given with the system of actions distinguished into him, passing out approbation within the framework of the school educating.

Keywords: educating, analogies, process of educating, set of descriptions, forming of mathematical concepts, necessary actions, of thinking, arithmetic action, isomorphism, symbolic model

Обучение понятиям – длительный процесс, который не завершается запоминанием его определения, а имеет целью, прежде всего, включение понятия в систему действий по его использованию для изучения и описания объектов и явлений реального мира, в том числе и умственного мира учащихся, и особенно при решении ими различного рода задач. При этом математическое понятие выступает по большому счету в роли, с одной стороны, *модели* объекта познания, то есть, по нашим представлениям, служит его *аналогом* [5, 6], с другой – особенно в процессе обучения, само является объектом познания, то есть выступает для учащегося в роли *оригинала*. Эта двойственная роль математических понятий должна быть учтена при выстраивании методики обучения математическим понятиям с активным использованием аналогии.

Под *методикой применения аналогии* в процессе обучения понятиям (в школе или вузе) будем понимать такую программу действий учителя и учащихся (умственных и материализованных) с понятиями, которая обеспечивает учащимся значительный уровень овладения ими, характеризующийся их пониманием, способностью осознанно применять их при решении задач и ориентироваться с их помощью в изменённых условиях. В такой программе действий может быть выделено и описано *главное звено* применения аналогии, определяющее направленность и основную цель этого процесса, а также – его отдельных этапов и действий, составляющих его структуру.

Главное звено использования аналогии

Формирование у учащихся понятий с использованием аналогии можно сравнить с процессом становления их в науке, если на ограничиваться лишь традиционно наблюдаемыми в обучении действиями по выявлению тех или иных свойств понятий, их пояснением со стороны учителя, усвоением определений и т.п. Например, понятие вектора как элемента векторного пространства сформировалось в науке в процессе выявления и обобщения аналогии между отдельными «представителями» вектора (как обобщенного понятия). Вначале – векторных величин в физике типа силы, перемещения, скорости, наряду с этим – их геометрическими образами в виде направленных отрезков, далее – переносами плоскости как особого рода отображениями, затем упорядоченными наборами чисел и т.д. Видимо, средства, подобные отмеченным, и умственные действия с ними желательно донести до учащихся при формировании у них этого понятия, если при этом активно использовать аналогию.

Аналогия в этом случае используется как основание, во-первых, для установления особого рода сходства сложных объектов, каковыми являются *отдельные* «представители» общего понятия, и, во-вторых, для переноса полученной информации с отдельных «представителей» на это общее понятие. Последнее в процессе обучения играет для учащегося роль *оригинала*, то есть такого объекта математической теории, которое желательно сформировать у него с достаточной полнотой, ещё не поддающейся непосредственному восприятию. С точки зрения принимаемой и развиваемой нами трактовки аналогии [2, 5, 6], отдельные «представители» общего, формируемого у учащихся понятия оказываются его аналогами, его моделями (*относительно некоторого известного набора характеристик* – базы аналогии [6]). Тогда *основная цель применения аналогии* – сформировать более полные представления о понятии-оригинале путём изучения-*исследования его моделей* и переноса обобщённой информации с моделей на оригинал, используя, в том числе, и базу аналогии. Эта совокупность действий, составляющих важный фрагмент умственной деятельности по использованию аналогии в процессе формирования математических понятий, и является его *главным звеном*. При этом, конечно же, необходимо учитывать и особенности различных моделей как более конкретных, ранее усвоенных понятий или даже предпонятий, протопонятий [3], и взаимосвязи между ними, так и опыт «общения» с ними учащихся, и, наконец, средства наглядного представления и этих отдельных моделей и действий с ними.

Рассмотрим в качестве примера изучение понятия степени с натуральным показателем в VII классе. Считается, что на этом этапе обучения данное понятие является усвоенным на достаточном уровне, если учащиеся:

– знают соответствующие определения и правила действий со степенями (см., например, действующий учебник [10] для $n \in N$ – §4, для $n = 0$ – §8);

– умеют на этой основе раскрывать выражения вида a^n и вычислять их значения при различных a;

– умеют использовать эти знания в тождественных преобразованиях выражений, необходимых при изучении многочленов.

И все же, овладев только указанными знаниями и умениями, даже если они достаточно хорошо «отработаны» и закреплены, учащиеся часто допускают ошибки такого рода: нередко вместо 2^3, b^{5+x} и т.п. они вычисляют $2 \cdot 3$, $b(5 + x)$ или $b\,5 + b\,x$. Во многих методических пособиях [1, 11] подобные ошибки объясняют так называемыми ложными (?) аналогиями. Надо полагать, что в этих случаях учащиеся усматривают некоторое *сходство форм*, то есть, вообще говоря, *внешних характеристик* сравниваемых объектов. Для того чтобы в дальнейшем не впасть в путаницу понятий, будем называть такой тип сходства *псевдоаналогией*, тем самым уже по названию отличая его от *понятия аналогии* как *структурного сходства сложных объектов* [6, с. 246]. В этом предлагаемое нами существенное отличие *аналогии понятий* от расхожего понимания аналогии как *сходства двух любых объектов в каких-то признаках*. Выявим далее глубинные причины возникновения приведённых выше и других ошибок, проанализировав понятие степени с натуральным показателем с указанной точки зрения.

По определению, b^n есть результат арифметической операции возведения в n-ю *степень* числа b, то есть, при $n > 1$ – результат *умножения* n одинаковых множителей, каждый из которых равен b: $\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \ldots чисел}$ (В).

Однако в младших классах учащиеся изучали действие (операцию) *сложение n* одинаковых слагаемых, каждое из которых равно a, а результат, то есть *сумму* $\underbrace{a+a+...+a}_{n...чисел}$, записывали как *произведение*: $a \cdot n = \underbrace{a+a+...+a}_{n...чисел}$ (А). Отметим, что именно с рассмотрения этого аналога начинается изучение понятия степени в учебнике [10, §4], что вполне методически оправдано.

Чтобы использовать введенное в [2, 6] понятие аналогии как *структурного сходства двух сложных объектов*, рассмотрим теперь два свойства: p_1 – «для чисел выполняется некоторая (бинарная) операция» и p_2 – «результат операции находится с помощью n одинаковых чисел». Совокупность этих двух свойств обозначим буквой $S = \{p_1, p_2\}$. Тогда, следуя [6, с. 246], относительно этого набора свойств понятия «степень b^n» и «произведение $a \cdot n$» необходимо признать *аналогичными*. Как правило, эту *базу аналогии* данных понятий избегают выявлять с учащимися. Им остаётся воспринимать внешнее сходство, псевдоаналогию изучаемых объектов – символических записей результатов соответствующих арифметических действий. Подмеченное и внешне воспринимаемое сходство форм учащиеся *расширяют* и неправомерно переносят его с формы записи на понятие как самой операции «возведение числа b в степень n», так и ее результата – степени b^n. Такое сходство, подмеченное ими на уровне лишь протопонятий, и его неправомерный перенос на другие объекты, приводит учащихся к ошибкам. Причина, таким образом, не в аналогии как своеобразном отношении типа сходства между сложными объектами, а её *неумелое* использование. В частности, непонимание того, что математические понятия – это сложные объекты, на что и не обращают внимания ни в школе, ни – часто – и вузе. Таким образом, в процессе обучения степени необходимо обучать не только (и не столько) *определениям* понятий, в особенности аналогичных друг другу, но и осознанному и верному использованию отношения аналогии понятий. Более того, применение аналогии и обучение грамотному её использованию при освоении понятия степени (и не только его) *становится необходимым элементом обучения самим понятиям* – дорастанию их до понимания математического понятия как элемента теории, вбирающего в себя многие его аналоги как его модели. В силу сказанного, наш следующий шаг – выяснить те умственные действия и операции, которые составляют *метод аналогий* как метод познания и обучения математике и её важным компонентам – понятиям и задачам [6].

Одна из первых групп действий по использованию аналогии – *подготовительные*, обозначим их **$Д_п$**. К ним мы отнесем $Д_{п1}$ – формирование первичных представлений учащихся о понятии-оригинале и цели его исследования (ознакомление с ним). Следующие два действия этой группы $Д_{п2}$, $Д_{п3}$. – ознакомление учащихся с конкретными представителями, моделями-аналогами (их часто называют просто примерами) нашего оригинала и со сходством (аналогией) между ними как возможными средствами, которые будут использоваться для достижения поставленной цели. При этом предполагается, что учитель, организующий описываемый процесс, понимает, что аналогия трактуется как специфическое отношение сходства между оригиналом (познаваемым объектом) и его моделями-аналогами [6], и на достаточном уровне владеет этим понятием. Результатом выполнения подготовительных действий является *учебная ситуация по применению аналогии для изучения с её помощью нового понятия.*

После уяснения учащимися ситуации на обозначенном подготовительном этапе (через выполнение соответствующей системы *подготовительных* учебных заданий) процесс использования аналогии переходит во вторую стадию – *реализующих действий* **$Д_р$**. Одно из первых действий этой группы $Д_{р1}$ – выбрать из некоторого, предъявленного учащимся набора, модели, полезные для достижения цели, и исследовать их. Действие является необходимым: если нужные модели изучаемого понятия не будут найдены и осознаны учащимися, то не будет и оснований для вывода по аналогии. Следующие два необходимых действия ($Д_{р2}$, $Д_{р3}$) – исследование выбранных моделей оригинала и получение желательной информации о них и – через них – первичной информации об оригинале. Этап реализующих действий настолько важен, что фактически он и определяет *главное звено применения аналогии – вывод по аналогии*, трактуемый как перенос информации с моделей на оригинал [12]. Его можно представить в виде следующей *схемы*:

$$\xrightarrow{Д_{p_1}} \textit{модели} \quad \xrightarrow{Д_{p_2}} \textit{информация о моделях} \quad \xrightarrow{Д_{p_3}} \textit{сведения об оригинале}$$

Прежде чем конкретизировать обозначенные действия, в особенности на примерах учебных заданий соответствующих типов, рассмотрим далее один из распространенных в математике видов аналогии понятий и способы его применения для получения соответствующих умозаключений. Продолжим для этого рассматривать понятие степени с натуральным показателем на множестве рациональных чисел (мы ограничиваемся этим множеством, поскольку в основной, да и в старшей школе им в большинстве случаев и ограничиваются авторы учебных пособий).

Некоторые математические основания аналогии понятий (комментарий для студентов, магистрантов, аспирантов и учителей)

Вернёмся к рассмотренному выше примеру изучения степени. В качестве оригинала, то есть изучаемого, а на начальном этапе формируемого понятия здесь целесообразно принять понятие (B) *арифметического действия* «возведение числа b в n-ю степень» как «умножения n одинаковых чисел», а в качестве его аналога – понятие (A) «сложение n одинаковых чисел, каждое из которых равно a». Проще всего аналогию между этими понятиями «увидеть», сравнивая две последовательности чисел и используя общепринятые символы для результатов рассматриваемых действий:

(A): $a, a+a, \ldots, \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ldots чисел}$; или: $a\cdot 1, a\cdot 2, \ldots a\cdot n$;

(B): $b, b\cdot b, \ldots, \underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ldots чисел}$; или: $b^1, b^2, \ldots, b^n$.

Далее, введя в рассмотрение для чисел a и b ($a\in Q,\ b\in Q_+$) соответственно понятия «противоположный» и «обратный» элементы, можно по аналогии эти последовательности «дополнить» слева и получить:

$$(A'){:}\ldots,(-a)\cdot n,\ \ldots,\ (-a)\cdot 2,\ (-a)\cdot 1,\ (-a)\cdot 0 =$$

$$= (-a)\cdot(-a+a) = 0,\ a\cdot 1,\ a\cdot 2,\ \ldots\ a\cdot n,\ \ldots;$$

$$(B'){:}\ \ldots,\left(\frac{1}{b}\right)^n,\ldots,\left(\frac{1}{b}\right)^2,\left(\frac{1}{b}\right)^1,\left(\frac{1}{b}\right)^0 =$$

$$= \frac{1}{b}\cdot b = b^0 = 1, b^1, b^2, \ldots, b^n, \ldots$$

Иными словами, на самом деле речь идёт не столько об аналогии *операций*, сколько об аналогии действительно сложных математических объектов – числовых или даже алгебраических систем. На множествах Q рациональных чисел и Q_+ – рациональных *положительных* чисел ($b \neq 0$), отдельно друг от друга рассматриваются операции: на первом – обычная (бинарная) операция сложения и (унарная) операция перехода к противоположному числу ($-a$); на втором – обычное умножение и (унарная) операция перехода от числа b к обратному числу b^{-1}. Тогда имеем две числовые системы $\langle Q, +, -, 0\rangle$ и $\langle Q_+, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ – алгебры, являющиеся, соответственно, *аддитивной* и *мультипликативной группами* рациональных (в случае Q_+ – положительных) чисел [8].

Из университетского курса алгебры известно, что заданная на множестве Q функция, например $y = f(x) = 2^x$, вместе с обратной функцией $x = log_2 y$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между указанными множествами, причем так, что сумме $x_1 + x_2$ чисел из Q соответствует произведение $y_1\cdot y_2$ чисел из Q_+, и наоборот. Следовательно, рассматриваемые группы *изоморфны*. С позиций введенного в [2, 5, 6] определения аналогии, наличие изоморфизма позволяет утверждать, что соответствующие *группы* и, как следствие, рассматриваемые на них операции *аналогичны* относительно рассмотренного выше набора их свойств $S = \{p_1, p_2\}$. Такое объяснение аналогии намечалось ещё известным математиком и ее популяризатором Д. Пойа [10].

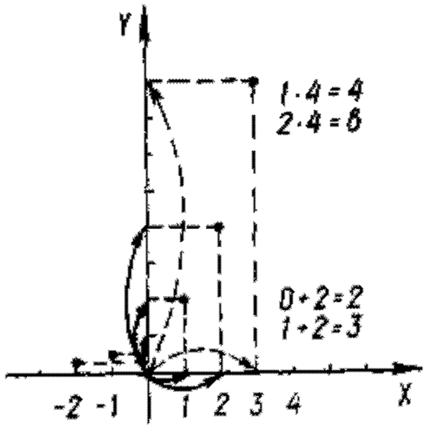
Изоморфизм позволяет, расширить набор S еще двумя общими характеристиками p_3 и p_4. p_3: «существует *нейтральный* элемент по соответствующей операции»: в Q им является число 0, в Q_+ его роль выполняет число 1, то есть выполняются равенства: $a + 0 = 0 + a = a$ и $b\cdot 1 = 1\cdot b = b$, и p_4: «для любого элемента из Q существует ему *обратный* по основной операции (то есть, в Q – *противоположный*), так что в Q выполняется равенство $-a + a = 0$, а в Q_+ соответственно $(b^{-1})\cdot b = 1$. Наконец, за счет изоморфизма элементу $-a$ из Q соответствует в Q_+ элемент $1/b = b^{-1}$, и наоборот. Становится понятным, почему *произведению* двух произвольных чисел из Q_+ соответствует *сумма* их прообразов из Q. Например, во взаимно однозначном соответствии находятся такие элементы из рассмотренных выше последовательностей (A) и (B): $(-2a + a) \xleftrightarrow{f,\, f^{-1}} (1/b)^2\ b$. Всё это определяет аналогию понятий «сумма (произведение) одинаковых чисел» уже относительно пополненного набора характеристик $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Такова теоретическая основа рассматриваемой аналогии, которую учащиеся фактически обнаруживают на допонятийном уровне и которую целесообразно вывести на уровень их осознания и деятельности (возможно, не используя напрямую соответствующие термины). Опыт показывает, что это возможно, если последовательно и систематически следовать логике *метода аналогий*, о котором в [6, с. 253] было лишь упоминание, и донести до учащихся систему необходимых учебных заданий, побуждающих их использовать соответствующие средства аналогии и отражающих адекватные умственные действия.

Учебные средства применения аналогии

Чтобы аналогию, особенно в форме изоморфизма, можно было эффективно использовать в процессе обучения, необходимо обратиться ещё к одной форме аналогии, возможно, наиболее распространенной и легче всего воспринимаемой. Такой формой, как с психологической, так и философско-математической точки зрения, обосновано в [3, 5, 6], является *знаковое моделирование.* Отсылая читателя к соответствующей литературе, отметим далее лишь те средства, которые активно и издавна (в особенности, со времен Р. Декарта) используются в математической познавательной деятельности. К таким моделям мы относим: *предметно-образные, словесные, словесно-символические, изобразительные и символические* [5].

Так, предметно-образными моделями понятий «произведение» и «степень» для учащихся, начиная с младших классов, могут служить соответствующие наборы хорошо известных им предметов. Например, «n наборов по a каких-то предметов в каждом наборе» является словесной моделью *произведения* $a{\cdot}n$, запись $a{\cdot}n$ – его символическая модель, а конкретный набор трех коробок по 7 цветных карандашей в каждой – предметная модель произведения, передаваемая также в форме символической, но уже *числовой* модели: $7{\cdot}3 = 7 + 7 + 7$ (карандашей). Для понятия «степень с натуральным показателем» *предметной* моделью может служить нетрудно представляемый учащимися пример: на этаже школы имеется 7 одинаковых классных комнат, в каждой из них – 7 рядов, в каждом ряду по 7 столов; всего на этаже: (1 стол)$\cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ столов. В этом случае последняя запись представляет собой *символическую* (числовую) модель понятия «степень числа 7 с показателем 3». Ей нетрудно сопоставить какую-то другую предметную модель, придавая основанию и показателю иные значения, воспринимаемые учащимися. Продолжая этот процесс, можно прийти и к полнокровной *словесной* модели – *определению* более общего понятия «степень числа b с показателем n» и ввести для него соответствующую символическую модель b^n.

Что касается изоморфизма выше представленных множеств (A) и (B), то для конкретных a и b (например, $a = 1$, $b = 2$) его можно дать в виде графика функции 2^n ($n \in Z$) в системе координат xOy (рисунок). На рисунке стрелочками по оси Ox иллюстрируется сложение и вычитание чисел из (A), на оси Oy – умножение и деление чисел из (B). Точками и штриховыми линиями на плоскости xOy изображается соответствие результатов этих действий при изоморфном отображении первого множества (A) на второе (B).



Так как знаковые модели являются аналогами формируемых понятий, то переходы от одного из них к другим, сопровождаемые соответствующими словесными переформулировками, представляют собой необходимые умственные действия по применению аналогии. Фактически, в таких переходах осуществляется перекодирование информации, ведущее к овладению различными моделями формируемого понятия и тем самым обогащающее его понимание учащимися. Очевидно, использование различных моделей, как и осуществление переходов между ними необходимо предусмотреть в соответствующей системе учебных заданий. Приведём примеры таких учебных заданий для учащихся V-VII классов, которые отвечают логике использования аналогии при формировании понятия степени вначале с натуральным, а затем и с целым показателем при положительном основании.

Учебные задания на применение аналогии

1. Сравнение моделей и оригинала, выявление их общности. Перенос общего свойства на оригинал.

1) $4+4+4+4+4;$	$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4;$
2) $a+a+a+a;$	$b\cdot b\cdot b\cdot b;$
3) $3x+3x+3x;$	$3y\cdot3y\cdot3y;$
4) $(c+b)+(c+b)+(c+b);$	$(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y);$
5) $(-a)+(-a)+(-a)+(-a);$	$\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}$?

1. Что общего в построении сумм и произведений? При ответе на этот вопрос требуется фактически выявить общность хотя бы части из характеристик набора $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. В особенности это касается p_1, p_2.

2. Как коротко записывается результат сложения в левой колонке? Предложите краткую запись произведений в колонке слева, воспользовавшись вашим опытом из младших классов. (Учитель убеждает в целесообразности общепринятой записи $a \cdot n$, хотя учащиеся могут предложить другую).

3. Опишите словами (устно или письменно, письменно в домашних условиях предпочтительнее), что предлагается сделать с числами или выражениями в каждой из колонок. Какое новое *действие* получают при сложении *n* одинаковых чисел, и как называют результат этого действия? Можно воспользоваться таким примером: «В выражении 5 + 5 + 5 предлагается *сложить три одинаковых числа*, то есть найти сумму таких чисел, каждое из которых равно 5. Такую сумму коротко записывают 5·3 и называют *произведением* числа 5 на число 3». В каких случаях пользуются таким действием? Приведите примеры. Охарактеризуйте с этих позиций сходные и отличительные признаки примеров в левой и правой колонках.

4. Что можно ожидать от умножения *n* одинаковых чисел? Что по аналогии можно и нужно изменить? Если *перемножить* три одинаковых числа, каждое из которых равно 5, то получим выражение 5·5·5. Короче оно записывается в виде 5^3, так что $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Получаем *третью* степень числа 5, или говорят: «пять в третьей степени»; 5 – основание степени, число 3 – показатель степени. Действие «умножение *n* одинаковых чисел, каждое из которых равно *b*» – это есть *новое* действие, его называют *возведением числа b в n-ю степень*, результат этого действия называют *n-й степенью числа b и всё это записывают* так: $\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \ldots чисел} = b^n$. В каких случаях удобно пользоваться этим действием? Придумайте и приведите свои примеры.

5. В чем сходство и отличие рассмотренных действий: в используемых основных исходных действиях? В словесном описании? В результатах?..

2. Различные знаковые модели оригинала и переходы между ними.

1. На этаже здания имеется 5 одинаковых офисов, в каждом из них – 5 рядов, в каждом ряду по 5 столов; сколько всего столов на этаже? Запишите ответ с помощью: а) произведения чисел, б) степени числа.

(Ответ может быть дан в следующих записях: (1 стол)$\cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ (столов). Первое умножение отвечает на вопрос: сколько столов в одном ряду? Второе умножение – на вопрос: сколько столов в 5 рядах? И т.д.

2. Изобразите описанную или аналогичную ситуацию на рисунке.

3. Верны ли равенства: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$; $3^2 = 2^3$? Как вы это объясните? Приведите свои примеры.

3. Использование изоморфизма на графической модели.

1. Начертите параллельно друг другу две числовые оси *Ox* и *Oy*, отметив на них начало координат и единичный отрезок. На первой из них отметьте число 0 и ещё несколько целых чисел *n* справа и слева от него ($|n| \geq 1$, вначале берутся положительные числа). На второй оси отметьте числа 2^n, проведите стрелочки от двух-трёх точек первой оси к соответствующим точкам второй оси. Полученное соответствие можно задать парами чисел: (0;1), (1;2), (2;4). Составьте ещё несколько пар соответствующих чисел.

2. В математике французским ученым Рене Декартом и его последователями был придуман удобный способ совместного рассмотрения 2-х числовых осей – известная вам декартова система координат ХОУ. Будем изображать на горизонтальной оси ОХ целые числа *n* и их суммы. На вертикальной оси – числа 2^n. Какие числа на оси ОУ соответствуют суммам 1 + 2, 0 + 2, 3 – 2, 2 – 2, взятым на оси ОХ? Как эти числа можно записать в виде произведения соответствующих чисел? В виде степени? Какую закономерность вы подмечаете? Ответ запишите словами и символически, в общем виде.

3. Вспомним, каким общим *законам* подчиняются действия (операции) сложения и умножения. Запишем их в общем виде (символически), опишем их словами. А теперь сравним действия умножения и возведения в степень: какие общие законы (свойства) выполняются?

4. На основании каких законов и каких действий выполняются следующие преобразования (упрощения выражений):

а) $a + b + a + a + b = 3a + 2b$; $a \cdot b \cdot a \cdot a \cdot b = a^3 \cdot b^2$;

б) $(a + b) \cdot c = ac + bc$; $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$?

Обоснуйте правильность последнего равенства, используя определение степени. Как бы вы назвали и сформулировали правило, которое задаётся этим равенством и которому подчиняется действие «возведение в степень *c*»? При каких условиях выполняются равенства п. б? Верно ли последнее равенство для *любых a*, *b*, *c*, а не только при $a, b \geq 0$, $c \in N$?

Отметим, что приведенные типы заданий для учащихся фактически побуждают их выполнять те умственные действия, которые закреплены в названиях этих заданий и выше (с. 4) определены как *реализующие* действия, составляющие главное звено метода аналогий. Впрочем, набор этих заданий требует существенного пополнения, если иметь в виду *всю систему* действий по применению аналогии, способствующую полноценному овладению понятием.

Завершим данную статью отсылкой читателя к нашим работам об обобщённой модели учебного и научного познания (ОМП) [7], которая оказывается полезной для организации обучения математическим знаниям не только в школе, но и в вузе. ОМП оказалась результатом анализа и обобщения рекомендаций Р. Декарта, А. Эйнштейна и других исследователей по организации процесса познания. Вместе с тем, приведенная выше схема (тоже модель) метода аналогий является ***конкретизацией*** ОМП на этапах I–III. По времени полученная раньше [6, с. 15], модель метода аналогий оказалась, тем не менее, содержательной в том, что в ней отразилось важное звено обобщённой модели познания: переход от умственного образа (УО) к его материализациям, переходы от одного вида материализации к другим, а от них – к понятию.

Список литературы

1. Выготский Л.С. Собрание сочинений [Текст]. Т. 2. – 1982.

2. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М., 1997.

3. Жохов А.Л. Методика систематического применения аналогии при формировании математических понятий и умений решать задачи с учащимися восьмилетней школы [Текст] // Автореферат дисс. канд. пед. н. – М., 1979. – 20 с.

4. Жохов А.Л. Об аналогии и возможностях её использования при обучении математике [Текст] // Современные проблемы физико-математического образования; под общ. ред. проф. И.Г. Липатниковой. – Екатеринбург: УрГПУ, 2011. – С. 244–256.

5. Жохов А.Л. Обобщённая модель познания как методологическая основа организации познавательной деятельности студентов // Математика и информатика: совершенствование их преподавания. Ч. 1. – Ярославль, 2013. – С. 54–61.

6. Зиман Э., Бьюнеман. Толерантные пространства и мозг. На пути к теоретической биологии [Текст]. Пролегомены. – М.: Мир, 1970. – С. 134–144.

7. Мальцев А.И. Алгебраические системы [Текст]. – М.: Наука, 1970.

8. Мордкович А.Г. Алгебра. Учеб. для 7 кл. общеобразовательной шк. [Текст] – М.: Мнемозина, 1997. – 160 с.: ил.

9. Пойа Д. Как решать задачу? [Текст] – М.: Учпедгиз, 1966. – 207 с.

10. Столяр А.А. Педагогика математики [Текст]: Учебное пособие для студ. физ. – мат. фак. – Минск: Народная асвета, 1986. – С. 96–99.

11. Уёмов А.И. Аналогия в практике научного исследования. – М.: Наука, 1970. – 264 с.

12. Шрейдер Ю.А. Равенство. Сходство. Порядок. [Текст] – М.: Наука, 1971. – 256 с.