УДК 681.586.32

МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТООПТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БОРНОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Базыкин С.Н., Базыкина Н.А., Кучумов Е.В., Чураков П.П.

ГОУ ВПО «Пензенский государственный университет», Пенза, e-mail: cbazykin@yandex.ru

В статье проведено теоретическое рассмотрение вопросов акустооптического рассеяния света на ультразвуке в акустооптических лазерных интерферометрах информационно-измерительных систем. Определено, что одним из основных элементов информационно-измерительных систем на основе лазерных интерферометров является акустооптический модулятор, в котором происходит взаимодействие оптических и ультразвуковых волн в результате дифракции света на ультразвуке. Показано, что акустооптическое взаимодействие представляет собой процесс рассеяния оптического поля на вариациях оптической неоднородности среды, создаваемой акустическими волнами. В статье делается вывод о том, что моделирование акустооптического рассеяния света на ультразвуке с использованием борновского приближения позволяет решить сложную задачу построения интерференционной картины, которую можно использовать для анализа метрологических характеристик информационно-измерительных систем с использованием лазерных интерферометров.

Ключевые слова: акустооптическое взаимодействие, акустооптический модулятор, борновское приближение, информационно-измерительная система, интерференционная картина, оптические и акустические волны

MODELING ACOUSTO-OPTIC INTERACTIONS WITH USE APPROACH BORN'S

Bazykin S.N., Bazykina N.A., Kuchumov E.V., Churakov P.P.

Penza State University, Penza, e-mail: cbazykin@yandex.ru

Theoretical consideration of the questions acousto-optic dissipations of the light is organized in article on ultrasound in acousto-optic lazer interferometer information-measuring systems. It is determined that one of the main element information-measuring systems on base lazer interferometer is acousto-optic modulator, in which occurs the interaction optical and ultrasonic waves as a result diffraction of the light on ultrasound. It is shown that acousto-optic interaction presents itself process of the dissipation of the optical field on variations of the optical spottiness of the ambience, created acoustic wave. Conclusion is done in article about that that modeling acousto-optic dissipations of the light on ultrasound with use approach Born's allows to solve the difficult problem of the building the interference pictures, which possible use for analysis of the metrological features information-measuring systems with use lazer interferometer.

Keywords: acousto-optic interaction, acousto-optic modulator, approach Born's, information-measuring system, interference picture, optical and acoustic waves

Метрологические требования контроля автоматизированного технологического оборудования имеют тенденцию к увеличению числа параметров контроля, что приводит к созданию измерительных систем, качество которых во многом зависит от точностных характеристик входящих в их состав устройств. К таким системам относятся измерительные системы, в состав которых входят акустооптические лазерные интерферометры, работающие на принципах гетеродинной лазерной интерферометрии [1, 2].

Одним из основных элементов акустооптических лазерных интерферометров является акустооптический модулятор, в котором происходит взаимодействие оптических и ультразвуковых волн в результате дифракции света на ультразвуке.

Акустооптическое взаимодействие представляет собой процесс рассеяния оптического поля на вариациях оптической неоднородности среды, создаваемых акустическими волнами. Акустическое поле, возбуждаемое в пространстве, образует в среде светозвуковода сложное распределение показателя оптического преломления среды.

Рассмотрим распространение акустических колебаний ультразвукового диапазона малой амплитуды в прямоугольном волноводе, заполненном немагнитной диэлектрической жидкостью. Будем отталкиваться от фундаментального уравнения акустики [3]

$$\Delta\varphi = \frac{1}{v_a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовых координатах; $\varphi(x, t)$ – потенциал скоростей, т.е. $\mathbf{v} = grad(\varphi)$ или $\mathbf{v} = -grad(\varphi)$; $v_a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}}$, ρ_0 – равновесная плотность жидкости. Связь изменения локальной плотности жидкости с потенциалом скорости φ выразится следующим образом [4]:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0}{\nu_a^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \qquad (2)$$

В одном из торцов волновода расположен источник ультразвуковых волн, противоположный торец устроен так, чтобы не создавать отражённых волн в объёме волновода. Начало координат совпадает с центром излучателя, ось *Ox* совпадает с осью волновода, оси *Oy* и *Oz* перпендикулярны стенкам волновода, а в местах с координатами $x_{cp} - a/2 \le x \le x_{cp} + a/2$, $y = \pm b/2$ имеются оптически-прозрачные окна (рис. 1).

Излучатель представляет собой пьезокварцевую пластинку, колеблющуюся по толщине. В этом случае излучатель будет генерировать плоские акустические волны, распространяющиеся вдоль оси *Ox* [3, 4]:

$$\phi(x,t) = \phi\sin(\omega_a t - K_a r)e^{-\eta x} =$$

$$= \phi\sin(\omega_a t - k_a x)e^{-\eta x}, \qquad (3)$$

где ω_a – частота колебаний излучателя, $K_a = (k_a, 0, 0)$ – волновой вектор, $k_a = \frac{\omega_a}{v_a}$ – волновое число, η – коэффициент поглощения ультразвуковой волны в результате вязких потерь.

Акустические волны распространяются вдоль волновода без искажения в соответствии с законами геометрической акустики, так как имеют малую длину волны и сохраняют плоскую волну при распространении в волноводе [4]. Таким образом, вследствие малой амплитуды, можно пренебречь такими эффектами, как акустическое течение, деформация волнового фронта около стенок волновода и т.п. [4, 5].

Подставляя (3) в (2), получаем выражение для изменений локальной плотности среды:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0\phi\omega_a}{\nu_a^2}\cos(\omega_a t - k_a x)e^{-\eta x} =$$

$$= \rho\cos(\omega_a t - k_a x)e^{-\eta x}.$$

Плотность среды ρ определяется выражением

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho =$$

$$= \rho_0\left(1 + \frac{\phi\omega_a}{\nu_a^2}\right)\cos(\omega_a t - k_a x)e^{-\eta x}. \qquad (4)$$

Рассмотрим связь плотности жидкости ρ с её абсолютным показателем преломления *n*. Известно [6, 7], что связь показателя преломления с микроскопическими характеристиками среды выражается следующим образом:

$$n^2 = 1 + 4\pi N\beta, \qquad (5)$$

где *N* – число молекул в единице объёма; β – поляризуемость молекул среды.

Учитывая, что $N = \rho/\mu$, где μ – молярная масса вещества, выражение (5) можно переписать в следующем виде:

$$n^2 = 1 + 4\pi\beta\frac{\rho}{\mu}. \qquad (6)$$

Уравнения изменения напряженности световой электромагнитной волны для вектора напряженности электрического поля через оптически неоднородную среду определяется выражением [6, 7]:

$$\Delta E = \frac{n^2}{\nu_a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \qquad (7)$$

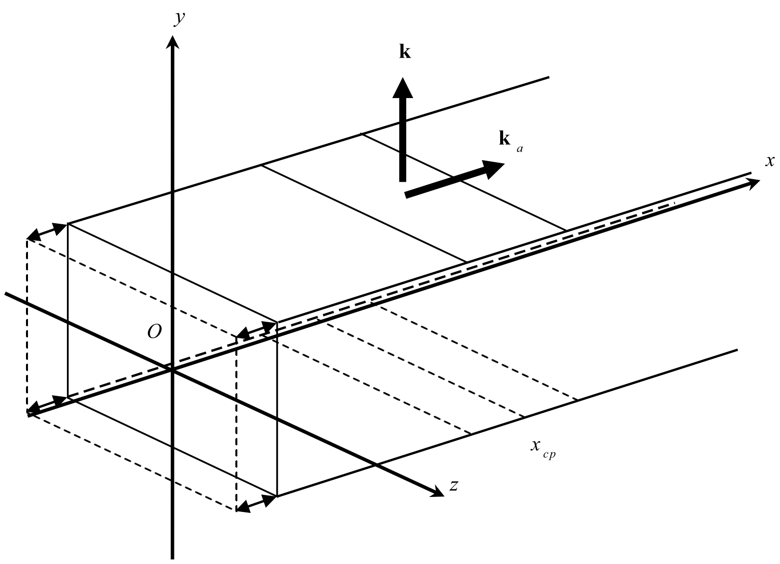

Рис. 1. Схема распространения акустических колебаний в прямоугольном волноводе

Так как среда представляет собой жидкость немагнитную и диэлектрическую (поляризация волны не играет роли), можно описать ее с помощью вектора одной из её проекций $E(x, y, z, t)$ [6, 7, 8]. С учётом данного замечания и выражений (4) и (6), уравнение (7) перепишется в виде

$$\Delta E = \frac{1}{\nu_a^2}\left[1 + \frac{4\pi\beta}{\mu}\rho_0\left(1 + \frac{\phi\omega_a}{\nu_a^2}\right)\cos\left(\omega_a t - k_a x\right)e^{-\eta x}\right]\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta E = \frac{\mu + 4\pi\beta\rho_0}{\mu\nu_a^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi\beta}{\mu\nu_a^2}\left(\rho_0\phi\frac{\omega_a}{\nu_a^2}\right)u\left(r,t\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \qquad (8)$$

где

$$u\left(r,t\right) = \cos\left(\omega_a t - k_a x\right)e^{-\eta x}.$$

Так как значения оптических частот намного больше акустических $\frac{\omega_a}{\omega_c} < 10^{-8}$, то можно воспользоваться так называемым бриллюэновским квазистатическим приближением и считать, что $u(r, t) \approx u(r)$ (рис. 2), предполагая акустическую волну неподвижной в процессе рассеяния, а $\omega_a t$ в выражении $\cos(\omega_a t - k_a x)e^{-\eta x}$ рассматривать как параметр.

Представив решение уравнения (8) в виде $E\left(r,t\right) = \dot{E}\left(r\right)e^{i\omega_a t}$, приходим к следующему уравнению:

$$\Delta\dot{E} + k^2\dot{E} = -\lambda^2 u\left(r\right)\dot{E}, \qquad (9)$$

где $k^2 = \frac{\omega_a^2}{\nu_a^2} + \frac{4\pi\beta\omega_a^2}{\mu\nu_a^2}\rho_0$, $\lambda^2 = \frac{4\pi\beta\omega_a^2}{\mu\nu_a^2}\frac{\rho_0\phi\omega_a}{\nu_a^2}$.

Используя функцию Грина, с учетом $\tilde{G}\left(r;r_0\right) = \frac{e^{ik\left|r-r_0\right|}}{\left|r-r_0\right|} = G\left(\left|r-r_0\right|\right)$ и уравнения (8), переходим от уравнения (9) к интегральному уравнению

$$\dot{E}\left(r\right) = \dot{E}_0\left(r\right) + \frac{\lambda^2}{4\pi}\int_V G\left(r-r_0\right)u\left(r_0\right)\dot{E}\left(r_0\right)dr_0, \qquad (10)$$

где $\dot{E}\left(r\right)$ представляет собой решение уравнения (9) для $\lambda = 0$ и удовлетворяющее соответствующим граничным условиям.

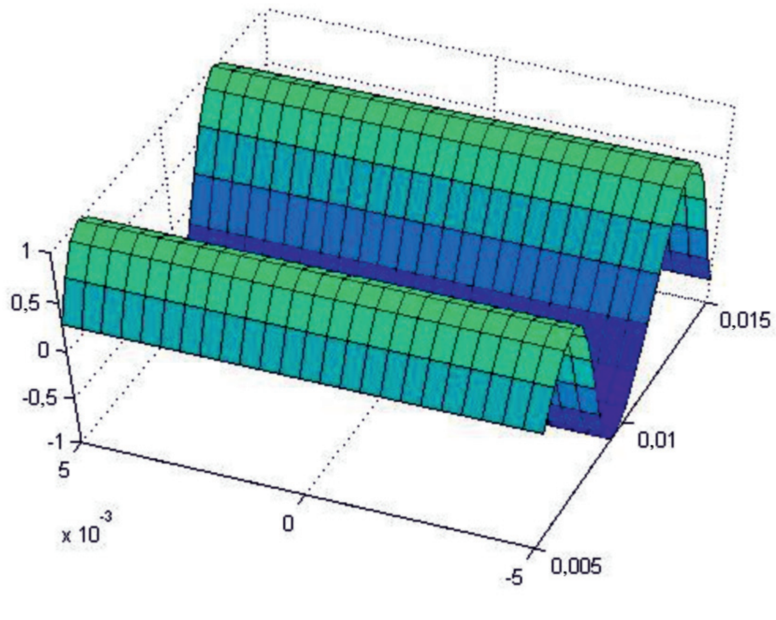

Рис. 2. Функция $u\left(r,t\right)$ для $t = 0$

Трехмерное сингулярное интегральное уравнение имеет вид:

$$\dot{E}(x,y,z)=e^{ikr}+\frac{\lambda^2}{4\pi}\int\limits_{-c/2}^{c/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_{x_{cp}-a/2}^{x_{cp}+a/2}\frac{e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\times$$

$$\times\cos(\omega_a t-k_a x_0)e^{-\eta x_0}\dot{E}(x_0,y_0,z_0)\,dx_0dy_0dz_0. \qquad (11)$$

Вследствие малого значения амплитуды акустической волны, т.е. при малом значении второго слагаемого уравнения (8), напряжённость E на выходе из области взаимодействия с акустическим полем можно представить в виде

$$E=E_0+E', \qquad (12)$$

где E_0 – невозмущённая составляющая напряженности световой волны, E' – рассеянная составляющая, $E_0>>E'$.

Подставляем (12) в (8). После отбрасывания членов порядка выше первого получаем следующее неоднородное уравнение:

$$\Delta E'-\frac{\mu+4\pi\beta\rho_0}{\mu v_a^2}\frac{\partial^2 E'}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{4\pi\beta}{\mu v_a^2}\frac{\rho_0\phi\omega_a}{v_a^2}u(r)\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}. \qquad (13)$$

Рассмотрим наиболее важный практический случай, когда падающая и рассеянная волны монохроматичны, то есть:

$$E_0(r,t)=\dot{E}_0(r)e^{i\omega_a t},$$

$$E'(r,t)=\dot{E}(r)e^{i\omega_a t}. \qquad (14)$$

Точка над функцией означает умножение на $e^{i\omega t}$. Подставляя (14) в (13) и сокращая множитель $e^{i\omega_a t}$, окончательно приходим к неоднородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\dot{E}'+k^2\dot{E}'=-\lambda^2 u(r)\dot{E}_0. \qquad (15)$$

В первом борновском приближении теории возмущений [8] решение уравнения (15) можно представить в виде

$$\dot{E}_0(r)=e^{ikr},\ \dot{E}'(r)=\frac{\lambda^2}{4\pi}\int\limits_V\frac{e^{ik|r-r_0|}}{|r-r_0|}u(r_0)e^{ikr_0}dr_0.$$

Наиболее интересным является случай, когда V – объём в виде прямоугольного параллелепипеда $x_{cp}-a/2\le x\le x_{cp}+a/2$; $-b/2\le y\le b/2$; $-c/2\le z\le c/2$ со сторонами a, b и c ($a\ne b\ne c$) и $\mathbf{k}=(0,k,0)$ – плоская волна. Тогда:

$$\dot{E}'(\mathbf{r})=\frac{\lambda^2}{4\pi}\int\limits_{-c/2}^{c/2}\int\limits_{-b/2}^{b/2}\int\limits_{x_{cp}-a/2}^{x_{cp}+a/2}\frac{e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\cos(\omega_a t-k_a x_0)e^{-\eta x_0}e^{iky_0}dx_0dy_0dz_0. \qquad (16)$$

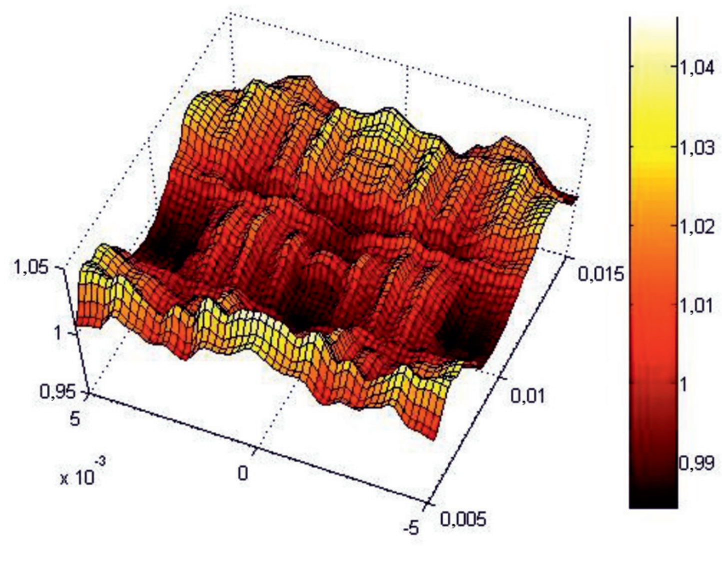

Рис. 3. Интерференционная картина акустооптического взаимодействия

К сожалению, факторизовать ядро в выражении (16) в декартовых координатах невозможно. Это не позволяет получить аналитическое выражение или хотя бы упростить данный интеграл. Поэтому целесообразно рассматривать интерференционную картину на плоскости $(x; b/2+\varepsilon; z)$, $\varepsilon > 0$, оставаясь в области, где интеграл (16) не является сингулярным.

При описании интерференции интенсивность света определяют по усреднённому по времени квадрату напряженности [6, 7]:

$$I = \left(E_0 + E'\right)^2 = E_0^2 + E'^2 + 2E_0E'. \quad (17)$$

Для случая монохроматических волн уравнение (17) будет иметь вид

$$I = E_0E_0^* + E'E'^* + 2\,\mathrm{Re}\{E_0E'^*\}, \quad (18)$$

где * означает комплексное сопряжение.

На рис. 3 представлена интерференционная картина, рассчитанная по предложенной методике, для следующих значений параметров: $t = 0$ сек, $a = b = c$ 10^{-2} м, x_{cp} 10^{-2} м, $\varepsilon = 5\cdot10^{-2}$, $\beta = 1{,}5\cdot10^{-30}$ м^3, $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $\mu = 18$ а.е.м. $= 3\cdot10^{-26}$ кг, $v_a = 1{,}4\cdot10^3$ м/с, $\omega_a = 6\times\times10^6$ рад/с, $v_c = 3\cdot10^8$ м/с, $\omega_c = 10^{15}$ рад/с, $k = 4{,}3\times\times10^6$ рад/м, $\lambda = 2{,}4\cdot10^3$ рад/м, $k_a = 10^3$ рад/м, $\eta = 0{,}5$ м$^{-1}$.

Вернёмся к уравнению (9) и представим решение в следующем виде:

$$\dot{E}(x,y,z) = \dot{E}(x,z)e^{iky}. \quad (19)$$

Подставив (19) в (9), после сокращения на e^{iky}, придём к уравнению

$$\frac{\partial^2 \dot{E}(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}(x,z)}{\partial z^2} + \lambda^2 u(x)\dot{E}(x,z) = 0. \quad (20)$$

Применим к уравнению (20) метод разделения переменных (метод Фурье) и представим решение уравнения в факторизованном виде [6]:

$$\dot{E}(x,z) = X(x)Z(z). \quad (21)$$

После подстановки (21) в (20), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений со следующими граничными условиями:

$$X'' + (\varsigma^2 + \lambda^2 u)X = 0, \quad (22)$$

$$Z'' + \varsigma^2 Z = 0, \quad (23)$$

$$Z(-c/2) = Z(c/2) = 0. \quad (24)$$

Условия (24) для уравнения (23) подразумевают, что стенки у волновода на рис. 1 сделаны из светоотражающего материала, за исключением оптически-прозрачных окон. Решение (23) с граничными условиями (24) имеет вид

$$Z_k(z) = \sin\left(\frac{k2\pi}{c}z\right), k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, в описании акустооптического взаимодействия возможно применение борновского приближения. Однако стоит отметить, что даже при вычислении интеграла (16) приходится использовать нестандартные подходы, т.к. интегрируемая часть является сильноосциллирующей функцией и данный вопрос требует отдельного рассмотрения.

Моделирование акустооптического взаимодействия с использованием борновского приближения позволяет решить достаточно сложную задачу построения интерференционной картины, которую можно использовать для анализа метрологических характеристик информационно-измерительных систем с использованием лазерных интерферометров.

Список литературы

1. Базыкин С.Н. Анализ помехоустойчивости информационно-измерительных систем / Базыкин С.Н., Базыкина Н.А. // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 3. – С. 19–22.

2. Базыкин С.Н. Принципы построения и состояние производства информационно-измерительных систем линейных перемещений / С.Н. Базыкин, Н.А. Базыкина, Н.П. Кривулин // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1; URL: http://www.science-education.ru/121-17219.

3. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. // Уч. пособ. для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 5-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.

4. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука // Учеб. пособ. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 280 с.

5. Руденко О.В. Теоретические основы нелинейной акустики / Руденко О.В., Солуян С.И. – М.: Наука, 1975. – 287 с.

6. Ландсберг Г.С. Оптика // Учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2003. – 848 с.

7. Сивухин Д.В. Общий курс физики // Уч. пособ. для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. – 3-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2005. – 792 с.

8. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / Тихонов А.Н., Самарский А.А. // Уч. пособие. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.