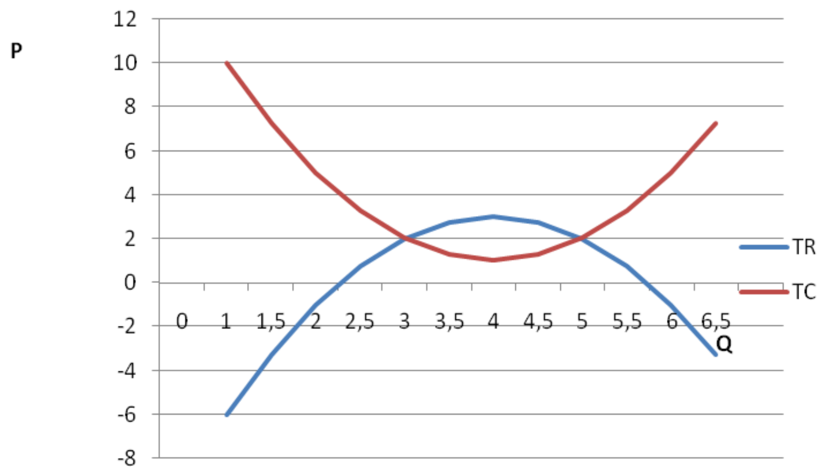

Рисунок 1

Остановимся на вычислении суммарной экономической прибыли фирмы в долгосрочном периоде. Обозначим:P(price)-цена данного товара, выпускаемого фирмой;Q(quantity)-объем товара, выпускаемый производителем;TR(total revenue)-валовой доход, TC(total costs)-валовые издержки.

Движущей силой деятельности фирмы является прибыль. Обозначим ее P(profit) Тогда P=TR-TC. Пусть TR=$-x^2+8x-7$; TC=$x^2-8x+17$.

Графики функций TR и TC представляют собой параболы, ветви которых соответственно направлены вниз и вверх (см. рисунок 1) Абсциссы точек пересечения графиков равны 2 и 5.

Координаты точек пересечения графиков функций TR и TC соответственно отображают объем выпускаемой продукции, при котором фирма-производитель будет иметь только нормальную прибыль, при которой TR-TC=0. Нас интересуют расчеты экономической прибыли в длительном периоде, т.к. предприятие в течение времени t увеличивает объем выпуска.

При помощи интегрального уравнения достаточно легко получить искомое значение. Пределами интегрирования являются значения Q_1 и Q_2, при которых TR=TC. Следовательно, зона экономической прибыли равна разности интегралов

$$\int_2^5 (-x^2+8x-7)dx - \int_2^5 (x^2-8x+17)dx = 166.$$

Имея данные фирмы об объемах производства, производственных мощностях расходах и доходах, становится возможным вычисление прибыли за конкретный период.

Расчет экономической прибыли возможен при анализе иных функций: как при сравнении объема максимизирующей прибыли, возможно сравнение как TC и TR в длительном периоде, так и MR и TR в короткосрочном.

Список литературы

1. .Гальперин В. М., Игнатьев С. В. Микроэкономика в 2 томах. Учеб. пособие для вузов—СПб.: 1999. — 494с

2. Математика для экономистов Задачник,учебно-практическое пособие под редакцией С.И Макарова и М.В. Мищенко:- М-Конус -2008 -360 стр.

3. Математический анализ начальный курс В. А. Ильин, В. А. Садовничий – М.: изд. МГУ 1985

4. Уфимцева Л.И. Профессиональные задачи в курсе математики в экономическом вузе Международная научно-методическая конференция «Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации « Сыктывкар 2008 с

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ДЕНЕЖНОЙ СУММЫ

Пупко Д.А., Шур В.А.

Самарский государственный экономический университет, Самара, Россия

Для решения многих экономических задач используются математические методы. Иллюстрацией может служить подсчет суммы, которая будет на счету человека, разместившего вклад в банке.

Рассмотрим процесс возрастания денежной суммы, положенной в банк при условии начисления 100 r сложных процентов в год. Пусть Y_0 обозначает начальную денежную сумму, а Y_x - денежную сумму по истечении x лет. Если бы проценты начислялись один раз в год, мы бы имели $Y_x + 1 = (1+r)Y_x$,где x = 0, 1, 2, 3,... Вообще, если проценты начисляются n раз в год и x принимает последовательно значения 0, 1/n, 2/n, 3/n,..., тогда $Y_{x+1/n} = \left(1+r/n\right)Y_x$, то есть

$$\frac{Y_{x+\frac{1}{n}} - Y_x}{\frac{1}{n}} = rY_x.$$

Обозначим $\Delta x = \frac{1}{n}$, получим

$$\frac{Y_{x+\Delta x} - Y_x}{\Delta x} = rY_x \frac{\Delta Y}{\Delta x} = rY_x$$

,

То есть закон возрастания выражен дифференциальным уравнением 1-го порядка $Y'_x = rY_x$ или

$$\frac{dY_x}{Y_x} = rdx \to dlnY_x = rdx \to \int dlnY_x = \int rdx \to lnY_x = rx + C.$$

Откуда, учитывая, что Y(0) = Y, получаем $Y_x = Y_0 e^{rx}$.

Список литературы

1. Репин О.А. Уфимцева Л.И. Экономические задачи в общем курсе высшей математики. Методическая разработка для студентов 1 курса. Куйбышев, 1984 – 24 с

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО КАПИТАЛА

Рыбачева Е.А., Севастьянова С.А.

Самарский государственный экономический университет, Самара, Россия

В условиях рыночной экономики каждый предприниматель сам решает, каким образом действовать, чтобы в сложившейся ситуации извлечь наибольшую прибыль. Интуитивные представления в данном случае не всегда могут являться верным ориентиром для принятия решений. Во многих случаях было бы рационально использовать математический подход для обоснования целесообразности принимаемых решений. В частности, многие экономические ситуации можно смоделировать и найти оптимальное решение с помощью методов математического программирования. В нашей статье мы рассмотрим задачу планирования инвестиций и применение метода Лагранжа для ее решения.

Предприниматель располагает свободным капиталом в размере 360 тысяч рублей. Исследования рынка показали, что наибольшую прибыль от вложения капитала можно получить при производстве изделий А и В. Инвестирование капитала может осуществляться в любых пропорциях. Однако вследствие различных причин (ограниченность спроса, специфика затрат на производство и т.п.) средняя прибыль в расчете на единицу произведенного товара не остается неизменной, а линейно снижается в зависимости от количества произведенной продукции: $p_1=100-q_1$ (где $q_1 \in (0; 100)$). Средняя прибыль на единицу продукта В также линейно зависит от объема производства и выражается формулой: $p_2=80-0{,}25q_2$, где $q_2 \in (0; 320)$.

При этом анализ производственных возможностей показал, что вложения капитала в производство единицы продукции снижаются с увеличением объема производства. Средний расход на единицу продукции товара А линейно зависит от достигнутого уровня производства: $y_1=10-0{,}1x_1$ (справедливо для $q_1 \in (0; 100)$) А для товара В аналогичная зависимость имеет вид: $y_2=12-0{,}1x_2$ (при $x_2 \in (0; 120)$). Предпринимателю необходимо решить, как наиболее выгодно инвестировать имеющийся капитал в производство.

Как правило, зависимости между экономическими факторами лишь условно можно считать линейными. В основном, такие показатели, как прибыль, себестоимость, объем спроса и предложения, затраты на производство и др., в действительности изменяются непропорционально росту объема производства, поэтому для более адекватного моделирования реальных экономических процессов приходится применять зависимости более сложных видов [2]. Однако, несмотря на очевидную условность приведенных закономерностей, они в целом адекватно отражают специфику процесса.

Составим экономико-математическую модель планирования инвестиций в проекты производства А и В. Требуется максимизировать прибыль в условиях непостоянных затрат капитала на производство единицы продукции и получаемого дохода. Обозначим x_1 - планируемый объем производства продукции А, x_2 – планируемый объем производства продукции В. Тогда объем денежных средств, инвестируемых в производство А и В, будет задан соотношением: $(10-0{,}1x_1)x_1 + (12-0{,}1\, x_2)\, x_2$.

Эта величина должна соответствовать объему всего имеющегося у предпринимателя капитала, то есть должно выполняться уравнение:

$(10-0{,}1x_1)x_1 + (12-0{,}1x_2)x_2 =360$,

или $10x_1-0{,}1(x_1)^2+12x_2-0{,}1(x_2)^2= 360$.

В результате инвестирования в производство А и В предприниматель получает прибыль, которую модно рассчитать как произведение объема производства на среднее значение прибыли на единицу продукции. Тогда целевая функция задачи имеет вид: $Z = (100-x_1)*x_1 + (80-0{,}25x_2)*\, x_2$.

Требуется найти такие $x_1 \in(0;100)$, $x_2 \in (0;120)$, при которых целевая функция принимает максимальное значение. Таким образом, получена задача нелинейного программирования:

$Z = (100-x_1)*x_1 + (80-0{,}25x_2)*\, x_2 \rightarrow \max$,

$10x_1-0{,}1(x_1)^2+12x_2-0{,}1(x_2)^2= 360$,

$x_1 \in(0;100)$, $x_2 \in (0;120)$.

Решим задачу методом множителей Лагранжа [1]. Составим функцию Лагранжа:

$L(x_1, x_2, u) = 100x_1-(x_1)^2 + 80x_2-0{,}25\,(x_2)^2 + u\,(10x_1-0{,}1(x_1)^2 + 12x_2-0{,}1(x_2)^2 – 360)$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 100 - 2x_1 + 10u - 0{,}2ux_1 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 80 - 0{,}5x_2 + 12u - 0{,}2ux_2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = 10x_1 - 0{,}1x_1^2 + 12x_2 - 0{,}1x_2^2 - 360 \end{cases}$$

Приравняем частные производные к нулю и найдем стационарные точки.

$$\begin{cases} 100 - 2x_1 + 10u - 0{,}2x_1 = 0 \\ 80 - 0{,}5x_2 + 12u - 0{,}2ux_2 = 0 \\ 10x_1 - 0{,}1x_1^2 + 12x_2 - 0{,}1x_2^2 - 360 = 0 \end{cases}$$

Выразим из первых двух уравнений x_1 и x_2 через u:

$x_1 = 100 +10u/2+0{,}2u$; $x_2 = 80+12u/0{,}5+0{,}2u$

Полученные выражения подставим в третье уравнение и найдем значение u.

$$10 * \left(\frac{100 + 10u}{2 + 0{,}2u}\right) - 0{,}1 * \left(\frac{100 + 10u}{2 + 0{,}2u}\right)^2 + 12 * \left(\frac{80 + 12u}{0{,}5 + 0{,}2u}\right) - 0{,}1 * \left(\frac{80 + 12u}{0{,}5 + 0{,}2u}\right)^2 = 360$$

Дальнейшие вычисления вручную затруднительны, поэтому выполним их в программе Excel. Для решения уравнения используем функцию «подбор параметра». В результате вычислений получены два значения переменной u. Для первого значения $u = -7{,}5$ найдем соответствующие значения $x_1 = 50$, $x_2 =10$; при втором значении $u \approx 2{,}49$ получим: $x_1 =50$, $x_2 \approx 110$. Таким образом, с достаточной степенью точности найдены две стационарные точки: M(50, 10) и N(50, 110). Подставим получившиеся значения в целевую функцию и вычислим ее экстремумы: Z(M)=3275, Z(N)=8275. Следовательно, аксимальная прибыль, которую может получить предприниматель, инвестировав имеющийся капитал, равна 8275, при объеме