Решим дифференциальное уравнение с начальными условиями операционным методом.

$$x''-x'+x=e^{-t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1.$$

Сущность метода состоит в том, что мы изучаем не саму функцию, а ее изображение по Лапласу. Перейдем к операторному преобразованию:

$$L(x)=X(p),\ L(x')=pX(p)-x(0),\ L(x'')=p^2X(p)-px(0)-x'(0).$$

Подставив начальные условия, получим уравнение: $X(p)=P^2X(p)-pX(p)+X(p)-1=\dfrac{1}{p+1}.$

Используя метод неопределенных коэффициентов, операторное решение уравнения представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{p+A}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2-p+1},\ \text{где}\ A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{2}{3},\ C=\frac{5}{3}.$$

По таблице преобразования Лапласа решение линейного дифференциального уравнения:

$$x(t)=\frac{1}{3e^t}+\frac{-e^{0,5t}\cos(\sqrt{\frac{3}{4}}t)}{3}+\frac{3e^{0,5t}\sin(\sqrt{\frac{3}{4}}t)}{\sqrt{3}}.$$

Решим это же дифференциальное уравнения с помощью рядов.

$$x''-x'+x=e^{-t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1.$$

Пусть частное решение это ДУ допускает разложение в степенной ряд Маклорена.

$$x(t)=\mathrm{x}(0)+\frac{\mathrm{x}'(0)}{1!}t+\frac{\mathrm{x}''(0)}{2!}t^2+\frac{\mathrm{x}'''(0)}{3!}t^3+.....$$

Вычисляем коэффициенты $\dfrac{x^{(m)}(0)}{n!}$, решение ДУ имеет вид:

$$x(t)=\frac{\mathrm{t}}{1!}+\frac{2}{2!}t^2-\frac{1}{4!}t^4-\frac{2}{5!}t^5+\frac{1}{7!}t^7+\frac{2}{8!}t^8+.....$$

А еще представим решение линейного дифференциального уравнения в виде:

$$x(t)=x_{\text{одн.}}(t)+x_{\text{ч}}(t),\ \text{где}\ x_{\text{одн.}}(t)-\text{решение соответствующее линейному ДУ: }\mathrm{x''}\text{-}\mathrm{x'}+x=0$$

Корнями характеристического уравнения $t^2-t+1=0$ являются комплексные числа

$$t=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

Следовательно,

$$x_{\text{одн.}}(t)=C_1e^{0.5t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+C_2e^{0.5t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+\frac{1}{3}e^{-t}.$$

Частное решение согласно функции e^{-t} определяем по виду

$$x_{\text{ч}}(\mathrm{t})=\mathrm{Ae}^{-\mathrm{t}},\ \text{где}\ \mathrm{A}=\frac{1}{3}.$$

Из начальных условий коэффициенты

$$C_1=-\frac{1}{3},\quad C_2=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$x(t)=\frac{1}{3e^t}+\frac{-e^{0,5t}\cos(\sqrt{\frac{3}{4}}t}{3}+\frac{3e^{0,5t}\sin(\sqrt{\frac{3}{4}}t}{\sqrt{3}}.$$

В работе использованы три способа решения ЛНДУ. Ряды дают приближенное решение уравнения, два других способа определяют его точное решение.

Список литературы

1. Матвеева Т.А. Специальные главы математики: операционное исчисление. Учебное пособие/Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная, Д.К. Агишева, С.А. Зотова; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – 56 с.

2. Практическое руководство к решению задач по операционному исчислению./ Зотова С.А., Светличная В.Б. – Волгоград, ВолгГТУ, ВПИ, 2000.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Петухова Я.А., Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: yana_petukhova@mail.ru

Для решения прямой задачи линейного программирования, можно воспользоваться решением двойственной задачи. Под двойственной задачей понимается вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определённых правил непосредственно из условий прямой задачи. Интерес в определении оптимального решения прямой задачи с помощью решения двойственной к ней задачи вызван тем, что вычисления при решении двойственной задачи менее сложные. Прибегая к такому решению, покупатель может найти такой набор цен ресурсов, имеющихся у производителей, при котором затраты на приобретение этих ресурсов будут минимальны, а производитель получит при этом прибыль не менее той, какую бы он получил при производстве и сбыте готовой продукции. Рассмотрим на примере.

Нам дана функция: $L=-2X_1+4X_2+14X_3+2X_4\to\min$ при этом ограничения:

$$\begin{cases}-2X_1-X_2+X_3+2X_4=6\\ -X_1+2X_2+4X_3-5X_4=30\\ X_J\ge 0\end{cases}$$

Решим исходную задачу, решая двойственную. Учтем несимметричный характер пары двойственных задач (II тип).

Введем матрицы

$$C = \left(-2\,4\,14\,2\right),\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 12 \\ -1 & 2 & 4-5 \end{pmatrix}$$

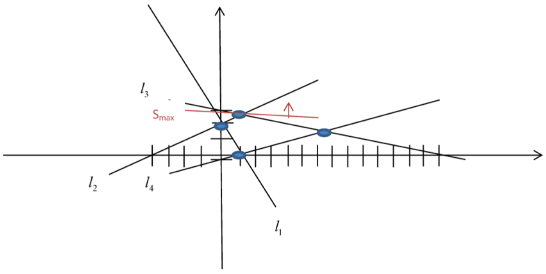
Тогда двойственная задача примет вид:

$$S = 6y_1 + 30y_2 \to \max$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 \le -2 \\ -y_1 + 2y_2 \le 4 \\ y_1 + 4y_2 \le 14 \\ 2y_1 - 5y_2 \le 2 \end{cases}$$

Тогда график функции будет выглядеть так:



Область допустимых решений – *ABCD*.

Мы получаем следующий вывод: максимальное значение *S* равно 102, при этом максимальный план равен $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Вернемся к исходной задаче.

Теперь система ограничений исходной задачи примет вид:

$$\begin{cases} -2X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 = 6 \\ -X_1 + 2X_2 + 4X_3 - 5X_4 = 30 \\ X_1 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

В итоге мы получаем: минимальное значение *L* равно 102, при этом минимальный план равен

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теория линейного программирования позволяет не только получать оптимальные планы с помощью эффективных вычислительных процедур, но и делать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, которая является двойственной по отношению к исходной ЗЛП.

РЕШЕНИЕ СЛАУ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ И ИХ ПРЕИМУЩЕСТВА

Савина Н.С., Зленко О.А., Матвеева Т.А., Агишева Д.К.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: savina.y79610899233@yandex.ru

Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – одна из наиболее часто встречающихся задач в научно-технических исследованиях, математической физике, экономике, статистике. Все используемые на практике методы решения СЛАУ можно разделить на две группы: точные методы и итерационные методы.

Преимуществом итерационных методов является удобное применение в современной вычислительной технике, т.к. решения, полученные с помощью прямых методов, обычно содержат погрешность. Итерационные методы же позволяют получить решение данной системы с заранее заданной точностью.

Суть итерационных методов решения систем заключается в том, что СЛАУ $AX = B$ мы приводим к итерационной форме $X = \varphi(X)$. Задаем начальное приближение значений решений $X^{(0)}$ *ир* решение системы ищем в виде последовательности $X^{(k+1)} = \varphi\left(X^{(k)}\right)$, постепенно улучшающихся приближений. Итерационный процесс должен быть сходящимся и его продолжают до тех пор, пока два последовательных приближения не совпадут в пределах заданной точности. Примером обычных итерационных методов служат: метод итераций (метод Якоби), метод Зейделя, метод верхних релаксаций.

Мы подробнее остановимся на итерационном методе Зейделя, т.к. этот метод является одним из самых распространенных и наиболее легко программируемых.

Он представляет собой некоторую модификацию метода простых итераций. Идеей этого метода, а самое главное его особенностью является то, что полученное в первом уравнении значение сразу же используется во втором, а значения первого и второго – в третьем и т. д. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения неизвестных не станут отличаться от предыдущих приближений на заданную точность ε.

Мы рассмотрели применение метода Зейделя к решению системы

$$\begin{cases} 21.9x_1 + 2.2x_2 + 3.1x_3 + 1.9x_4 = 25.70 \\ 2.2x_1 + 22.2x_2 + 2.5x_3 + 3.5x_4 = 31.46 \\ 3.1x_1 + 2.5x_2 + 20.8x_3 + 2.3x_4 = 32.76 \\ 1.9x1 + 3.5x2 + 2.3x3 + 33.1x4 = 53.72 \end{cases}$$

с точностью ε = 0,0001.

В данной системе наблюдаем преобладание диагональных коэффициентов, что является достаточным условием сходимости метода Зейделя. Приведем систему к виду $X = \varphi(X)$ и запишем итерационную формулу

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/21.9\left(25.70 - 2.2x_2^{(k)} - 3.1x_3^{(k)} - 1.9x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = 1/22.2\left(31.46 - 2.2x_1^{(k+1)} - 2.5x_3^{(k)} - 3.5x_4^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = 1/20.8\left(32.76 - 3.1x_1^{(k+1)} - 2.5x_2^{(k+1)} - 2.3x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} = 1/33.1\left(53.72 - 1.9x_1^{(k+1)} - 3.5x_2^{(k+1)} - 2.3x_3^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

В ходе работы была написана программа в среде программирования C++ по реализации решения СЛАУ методом Зейделя. В качестве начального вектора выбрали свободные члены системы: $X^{(0)} = (1.17;1.42;1.58;1.62)^T$. Оказалось, что достаточно трех итераций, чтобы получить решение данной системы с заданной точностью.