Таблица 4

Значения функции $B_2\left(x^1\right)$

x^1	0	1	2	3	4
	43	37	31	25	0

Таблица 5

Значения функции $u^{*2}\left(x^1\right)$

x^1	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	0

Шаг 3. Найдем

$$B_1\left(x^0\right)=\max\left\{B_2\left(x^0+u^1\right)+f_1(u^1)\right\},$$

где $x^0=0$. Для определения максимума $B_1\left(x^0\right)$ составим табл. 6 значений функции

$$Z_2\left(0,u^1\right)=B_2\left(u^1\right)+f_1\left(u^1\right),$$

которые найдем с помощью табл. 1 и 4.

Таблица 6

Значения функции $Z_2\left(0,u^1\right)$

u^1	0	1	2	3	4
$Z_2\left(0,u^1\right)$	$B_2\left(0\right)+f_1\left(0\right)$	47	48	46	40

Из таблицы следует, что $u^{*1}(0)=2$; $B_1(0)=48$.

Этап 2. (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Оптимальное начало фазовой траектории определяется начальным условием $x^{*0}=0$.

Шаг 1. С помощью таблицы находим

$$u^{*1}=u^{*1}(0)=2;\ x^{*1}=x^{*}0+u^{*1}=0+2=2.$$

Шаг 2. Из таблицы 5 получаем

$$u^{*2}=u^{*2}(2)=1;\ x^{*2}=x^{*1}+u^{*2}=2+1=3.$$

Шаг 3. $u^{*3}=u^{*3}(x^{*2})=u^{*3}(3)=1$; $x^{*3}=x^{*2}+u^{*3}=3+1=4$.

В результате проведенных расчетов получаем: количество дней затраченных на 1-2-3 зачет соответственно, при этом максимальное суммарное количество баллов составляет $B_1(0)=48$ баллов.

Список литературы

1. Основы методов оптимизации / ЛВ.В.есин, Ю.П. Лисовец – М.: Изд-во МАИ», 1998. – 248-266с.
2. Методы принятия оптимальных решений. Часть I / Д.К.Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная / ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2011. – 143-153 с.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Алешин И.Ю., Сычева А.В, Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, наиболее распространённым случаем, является задание этой связи в виде некоторой таблицы (табл. 1).

Таблица 1

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Эти значения – либо экспериментальные данные, либо результаты расчётов. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Однако получить эти значения можно лишь путём очень сложных расчётов или проведением дорогостоящих экспериментов.

С точки зрения экономии времени и средств необходимо использовать табличные данные для приближённого вычисления искомого параметра y при любом значении параметра x (из некоторой области), поскольку точная связь не известна. Этой цели служит задача о точечной аппроксимации – интерполяции. Она состоит в нахождении функции $y=f(x)$, проходящей через заданные точки (узлы интерполяции).

На практике, в качестве интерполяционных многочленов часто используются сплайны третьей степени, имеющие на отрезке $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Такие сплайны называются кубическими и обозначаются $S_3(x)$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы значения некоторой функции $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,...,n$. Интерполяционным кубическим сплайном называется сплайн вида:

$$S_3(x)=a_{i0}+a_{i1}\cdot(x-x_i)+a_{i2}\cdot(x-x_i)^2+a_{i3}\cdot(x-x_i)^3,$$

$$x\in[x_i,\ x_i+1],$$

удовлетворяющий условиям:

а) функция $S_3(x_i)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;

б) $S_3(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,...,n$;

в) $S_3''(x_0)=S_3''(x_n)=0$.

В результате применения метода к данным таблицы, получается системы линейных алгебраических уравнений, имеющая трёхдиагональную матрицу с диагональным преобладанием. Такие матрицы являются неособенными. Поэтому решение системы существует и притом единственное. Для нахождения неизвестных используется метод прогонки.

Решение задачи построения кубического сплайна осуществлялось в системе Mathcad 13.

В качестве примера выбраны данные:

$$x:=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\\9\end{pmatrix},\quad y:=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

В результате реализации получен сплайн, изображённый на рис. 1 вместе с исходными данными. Построенный сплайн проходит через узлы интерполяции.

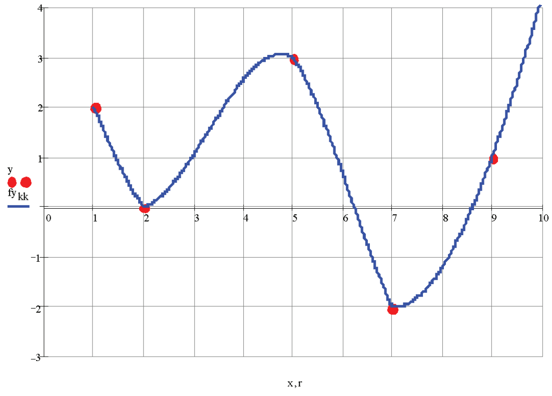


Рис. 1

Кубическая сплайн-функция обладает наименьшей (в некотором смысле) кривизной среди всех дважды непрерывно дифференцируемых функций на данном отрезке $[a, b]$ с заданными значениями в узлах интерполяции.

Список литературы

1. Практическое руководство по сплайнам. Де Бор К. – М.: Радио и связь, 1985.
2. Методы сплайн-функций. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука. 1980 г.
3. Теория сплайнов и её приложения. Альберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж. – М.: Мир, 1972.

ФУНКЦИИ ИЗДЕРЖЕК В ЭКОНОМИКЕ

Астапенко Е.Ю., Лисник А.Ф., Немцова Е.В., Агишева Д.К., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Функции издержек фирмы играют важную роль в изучении определения её оптимального объёма выпуска.

Для максимизации прибыли при производстве какого-то объём выпуска фирма должна минимизировать издержки производства.

Пусть функция издержек производства определяется уравнением:

$$y = 50x - 0,05x^3 \text{ (у.е.).}$$

Найти:

а) средние издержки производства на единицу продукции, если объём выпуска продукции $x_0 = 10$;

б) среднее приращение издержек производства на единицу продукции, если объём выпуск продукции увеличится до 15;

в) предельные издержки производства дополнительной единицы продукции.

Решение. Функция издержек

$$y(x) = 50x - 0,05x^3 .$$

а) Найдём средние издержки производства на единицу продукции, если объём выпуска продукции $x_0 = 10$:

$$\frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{50x - 0,05x^3}{x} = 50 - 0,05 \cdot x^2 = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45 \text{ (у.е.).}$$

б) Найдём среднее приращение издержек производства на единицу продукции, если объём выпуска продукции увеличился до $x = 11$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(50x - 0,05x^3)\big|_{x=11} - (50x - 0,05x^3)\big|_{x=10}}{x\big|_{x=11} - x\big|_{x=10}} =$$

$$= \frac{(50 \cdot 11 - 0,05 \cdot 11^3) - (50 \cdot 10 - 0,05 \cdot 10^3)}{11 - 10} = \frac{33,45}{1} = 33,45 \text{ (у.е.).}$$

в) Найдём предельные издержки производства дополнительной единицы продукции:

$$y'(x) = (50x - 0,05x^3)' = 50 - 0,15x^2 \Rightarrow y'(10) = 35 \text{ (у.е.);}$$

$$y'(11) = 31,85 \text{ (у.е.).}$$

Сравнивая результаты, сделаем вывод: при производстве дополнительной единицы продукции дополнительные затраты (издержки) уменьшаются.

Список литературы

1. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: ил.
2. ФроловаТ.А. Экономическая теория: конспект лекций. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009. http://www.aup.ru/books/m202/

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ПРОВЕДЕНИЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НАЙДЁННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Городжий А.В., Агишева Д.К., Зотова С.А., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный технический университет», Волжский, e-mail: gorodzhii_andrei@mail.ru

Каждый студент задаётся вопросом: «Для чего нужно линейное программирование и понадобится ли оно мне в жизни?» Рассмотрим значимость данной математической дисциплины с точки зрения бизнеса и производства.

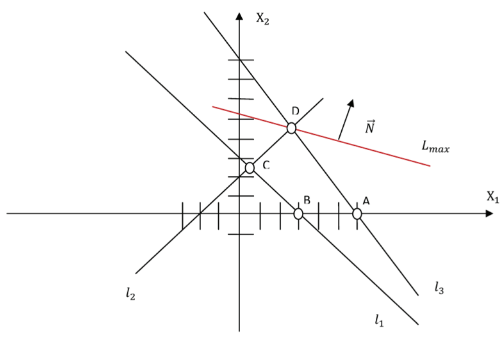
Прибегая к линейному программированию, производитель может найти оптимальный производственный план, благодаря которому будет достигаться максимум прибыли при минимуме издержек, а также проследить за тем, как будет изменяться прибыль при изменении величины ресурсов. Приведём пример.

У нас есть следующая функция:

$$L(X) = 2X_1 + 8X_2 \to \max ,$$

с её ограничениями: $\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 3 \\ X_1 - X_2 \leq -2 \\ 4X_1 + 3X_2 \leq 24 \end{cases}$

Сделаем анализ устойчивости. График нашей функции будет выглядеть следующим образом:



Интересующая нас область является фигурой *ABCD*.