Список литературы

1. Математическая статистика: учеб. пособие / Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная; ВПИ (филиал) ВолГТУ, – Волгоград, 2010. – 159 с.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТАМ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Акимжанов А.Т., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: v.i.n.z.e.r.01@yandex.ru

Динамическое программирование – это математический метод поиска оптимального управления, специально приспособленный к многошаговым процессам. Ключевая идея динамического программирования заключается в нахождении оптимального решения подзадач меньшего размера с дальнейшим объединением в одно общее решение. Метод позволяет достичь существенной экономии вычислений по сравнению с полным перебором вариантов.

Реализацию метода динамического программирования рассмотрим на примере решения следующей дискретной задачи.

Для подготовки к трем зачетам по дисциплинам: теоретическая механика, математика и английский язык студенту предоставлено 4 дня. Зависимость получения баллов на зачете от количества затраченных на подготовку дней представлены в табл. 1. Необходимо определить стратегию подготовки к трем зачетам, так чтобы получить максимальную сумму баллов.

Таблица 1

Зависимость количества баллов от затраченных на подготовку дней

Количество баллов, $f_k(u)$	Выделенные дни на подготовку к зачетам, u				
	0	1	2	3	4
$f_1(u)$	0	10	17	21	38
$f_2(u)$	0	25	29	36	40
$f_3(u)$	0	6	12	18	39

Для решения задачи сформулируем многошаговую математическую модель: $f(\hat{x},\hat{u})$ – Целевая функция задачи (максимальное количество баллов), где $\hat{x}=\{x^0,x^1,x^2,x^3\}$ – оставшееся количество дней (xk) после k-го выученного предмета (фазовая траектория), $\hat{u}=\{u^0,u^1,u^2,u^3\}$ – количество дней (uk) затраченных на k-й зачет (вектор управлений).

$$f(\hat{x},\hat{u})=\sum_{k=1}^{3} f_k\left(u^k\right)\to \max$$

$x^k=x^{k-1}+u^k$ – уравнение состояний, $x^k\in[0;4]$ и $u^k\in[0;4-x^{k-1}]$.

Рассмотрим реализацию метода динамического программирования:

Этап 1. (условная оптимизация).

Шаг 1. Найдем $B_3\left(x^2\right)=max\, f_3(u^3)$ – функция Беллмана. Так как $Z^3\left(x^2,u^3\right)=f^3(u^3)$ есть возрастающая функция аргумента u^3 (по табл. 1), то её максимум достигается при максимально допустимом значении u^3, т.е. $u^{*3}\left(x^2\right)=[4-x^2]$.

Отсюда,

$$B_3\left(x^2\right)=Z^3\left(x^2,u^{*3}\left(x^2\right)\right)=f^3([4-x^2]).$$

Значения $B_3\left(x^2\right)$, найдем с помощью табл. 1.

Таблица 2

Значения функции $B_3\left(x^2\right)$

x_2	0	1	2	3	4
$B_3\left(x^2\right)$	$f^3\left([4-0]\right)=39$	18	12	6	0

Шаг 2. Найдем

$$B_2\left(x^1\right)=max\left\{B_3\left(x^1+u^2\right)+f_2(u^2)\right\}.$$

Для определения максимума функции

$$Z_2\left(x^1,u^2\right)=B_3\left(x^1+u^2\right)+f_2\left(u^2\right)$$

составим табл. 3, используя табл. 1 и 2.

Таблица 3

Значения функции $Z_2\left(x^1,u^2\right)$

x^1 \ u^2	0	1	2	3	4
0	$B_3(0)+f_2(0)=39$	$\boldsymbol{B}_3(1)+\boldsymbol{f}_2(1)=43$	$B_3(2)+f_2(2)=41$	$B_3(3)+f_2(3)=42$	$B_3(4)+f_2(4)=40$
1	$B_3(1)+f_2(0)=18$	37	35	36	-
2	$B_3(2)+f_2(0)=12$	31	29	-	-
3	$B_3(3)+f_2(0)=6$	25	-	-	-
4	$\boldsymbol{B}_3(4)+\boldsymbol{f}_2(0)=0$	-	-	-	-

В табл. 3 жирным шрифтом выделены максимальные по u^2 значения функции $Z_2\left(x^1,u^2\right)$, соответствующие различным x^1. С помощью табл. 3 находим значения функции $B_2\left(x^1\right)$ и $u^{*2}\left(x^1\right)$.

Таблица 4

Значения функции $B_2\left(x^1\right)$

x^1	0	1	2	3	4
	43	37	31	25	0

Таблица 5

Значения функции $u^{*2}\left(x^1\right)$

x^1	0	1	2	3	4
	1	1	1	1	0

Шаг 3. Найдем

$$B_1\left(x^0\right)=\max\left\{B_2\left(x^0+u^1\right)+f_1(u^1)\right\},$$

где x^0=0. Для определения максимума $B_1\left(x^0\right)$ составим табл. 6 значений функции

$$Z_2\left(0,u^1\right)=B_2\left(u^1\right)+f_1\left(u^1\right),$$

которые найдем с помощью табл. 1 и 4.

Таблица 6

Значения функции $Z_2\left(0,u^1\right)$

u^1	0	1	2	3	4
$Z_2\left(0,u^1\right)$	$B_2\left(0\right)+f_1\left(0\right)$	47	48	46	40

Из таблицы следует, что $u^{*1}(0)=2$; $B_1(0)=48$.

Этап 2. (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Оптимальное начало фазовой траектории определяется начальным условием $x^{*0}=0$.

Шаг 1. С помощью таблицы находим

$$u^{*1}=u^{*1}(0)=2;\ x^{*1}=x^{*}0+u^{*1}=0+2=2.$$

Шаг 2. Из таблицы 5 получаем

$$u^{*2}=u^{*2}(2)=1;\ x^{*2}=x^{*1}+u^{*2}=2+1=3.$$

Шаг 3. $u^{*3}=u^{*3}(x^{*2})=u^{*3}(3)=1$; $x^{*3}=x^{*2}+u^{*3}=3+1=4$.

В результате проведенных расчетов получаем: количество дней затраченных на 1-2-3 зачет соответственно, при этом максимальное суммарное количество баллов составляет $B_1(0)=48$ баллов.

Список литературы

1. Основы методов оптимизации / ЛВ.В.есин, Ю.П. Лисовец – М.: Изд-во МАИ», 1998. – 248-266с.

2. Методы принятия оптимальных решений. Часть I / Д.К.Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная / ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2011. – 143-153 с.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Алешин И.Ю., Сычева А.В, Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: mathemat@volpi.ru

Когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, наиболее распространённым случаем, является задание этой связи в виде некоторой таблицы (табл. 1).

Таблица 1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Эти значения – либо экспериментальные данные, либо результаты расчётов. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i. Однако получить эти значения можно лишь путём очень сложных расчётов или проведением дорогостоящих экспериментов.

С точки зрения экономии времени и средств необходимо использовать табличные данные для приближённого вычисления искомого параметра y при любом значении параметра x (из некоторой области), поскольку точная связь не известна. Этой цели служит задача о точечной аппроксимации – интерполяции. Она состоит в нахождении функции $y=f(x)$, проходящей через заданные точки (узлы интерполяции).

На практике, в качестве интерполяционных многочленов часто используются сплайны третьей степени, имеющие на отрезке $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Такие сплайны называются кубическими и обозначаются $S_3(x)$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы значения некоторой функции $y_i=f(x_i)$, $i=0,1,...,n$. Интерполяционным кубическим сплайном называется сплайн вида:

$$S_3(x)=a_{i0}+a_{i1}\cdot(x-x_i)+a_{i2}\cdot(x-x_i)^2+a_{i3}\cdot(x-x_i)^3,$$

$$x\in[x_i,\ x_i+1],$$

удовлетворяющий условиям:

а) функция $S_3(x_i)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно;

б) $S_3(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,...,n$;

в) $S_3''(x_0)=S_3''(x_n)=0$.

В результате применения метода к данным таблицы, получается системы линейных алгебраических уравнений, имеющая трёхдиагональную матрицу с диагональным преобладанием. Такие матрицы являются неособенными. Поэтому решение системы существует и притом единственное. Для нахождения неизвестных используется метод прогонки.

Решение задачи построения кубического сплайна осуществлялось в системе Mathcad 13.

В качестве примера выбраны данные:

$$x:=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\7\\9\end{pmatrix},\ y:=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

В результате реализации получен сплайн, изображённый на рис. 1 вместе с исходными данными. Построенный сплайн проходит через узлы интерполяции.

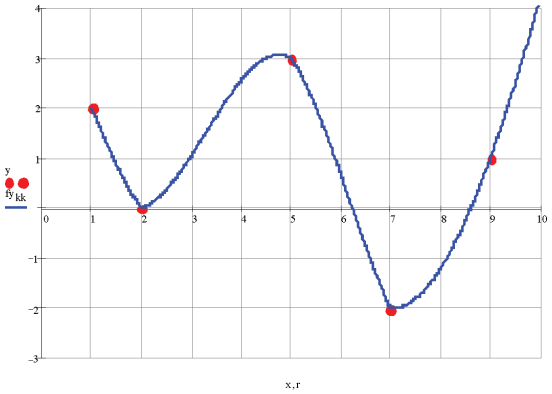

Рис. 1