

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Также существует нормальное уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где C – центр окружности, а R – радиус.

Являясь кривой второго порядка, окружность удовлетворяет данному уравнению:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

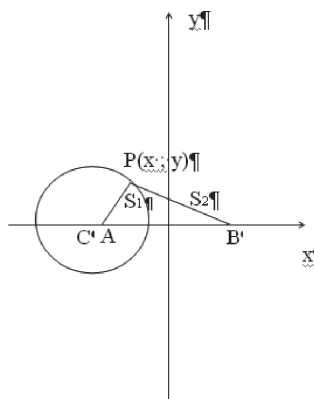
где $B = 0$, $A = C$.

Мы можем точно сказать, что действительная кривая второго порядка является окружностью тогда и только тогда, когда:

- 1) коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой;
- 2) отсутствует член, содержащий произведение текущих координат.

Остановимся на рассмотрении примера решения экономической задачи с использованием канонического уравнения окружности:

Два предприятия A и B , расстояние между которыми равно 200 км, производят некоторое изделие, заводская цена (руб.) которого одна и та же для обоих предприятий. Транспортные расходы на перевозку единицы изделия от предприятия A до потребителя P составляют 9 руб./км, а от предприятия B – 3 руб./км. Как следует разделить рынок сбыта, чтобы расходы потребителей были одинаковыми? Какому потребителю изделия, какого предприятия выгоднее покупать?



Решение данной задачи сводится, во-первых, к наглядному построению прямоугольной системы координат поместив начало координат в середине отрезка AB и направив ось абсцисс по лучу AB , а ось ординат перпендикулярно ему. Определим геометрическое место точек, в которых расходы потребителей на приобретение продукции предприятий A и B будут одинаковыми. Допустим, что потребитель располагается в точке P с координатами (x, y) . Тогда обозначим расстояния от точки P до точек A и B как расстояние равное $|AP| = S_1, |BP| = S_2$ (км).

В таком случае расходы на приобретение единицы изделия предприятия A будут равны $p + 9S_1$, а предприятия B – $p + 3S_2$. По условию расходы потребителей должны быть одинаковыми, то $p + 9S_1 = p + 3S_2$. Преобразовав, получим, что

$$3S_1 = S_2. \quad (1)$$

Вычислим значения S_1 и S_2 , используя координаты точек $A(-100; 0)$, $B(100; 0)$ и $P(x, y)$:

$$S_1 = |AP| = \sqrt{(x + 100)^2 + y^2}, S_2 = |BP| = \sqrt{(x - 100)^2 + y^2}.$$

Затем подставив в равенство (1) будем иметь:

$$3\sqrt{(x + 100)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 100)^2 + y^2}.$$

Отсюда получим уравнение:

$$9(x^2 + 200 + 10000 + y^2) = x^2 - 200 + 10000 + y^2$$

$$\text{или } 8x^2 + 8y^2 + 2000x + 80000 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 8, сгруппируем его члены по переменным и дополним до полного квадрата скобки. Тогда уравнение примет вид:

$$(x + 125)^2 + y^2 = 5625.$$

Конечное уравнение есть уравнение окружности, с центром в точке C , которая имеет координаты $(-125; 0)$, и радиусом $R = 75$.

Для потребителей, находящихся на этой окружности, $3S_1 = S_2$, значит, $p + 9S_1 = p + 3S_2$, расходы на приобретение изделия, как предприятия A , так и предприятия B одинаковы. Для потребителей, находящихся внутри круга, который ограничен данной окружностью, $3S_1 < S_2$, следовательно, $p + 9S_1 < p + 3S_2$, поэтому расходы на приобретение изделий предприятия A ниже. Также можно установить, что для потребителей, находящихся вне этого круга, ниже расходы на приобретение изделий предприятия B .

Таким образом, рынок сбыта можно выгодно распределить на несколько экономических частей таким образом: а) потребителям, находящимся на окружности, безразлично, изделия каких предприятий покупать; б) потребители, находящиеся внутри указанного круга, покупают изделия предприятия A ; в) потребители, находящиеся вне круга, покупают изделия предприятия B .

В заключение хотелось бы отметить, что для решения многих задач экономического профиля требуются математическая подготовка и знание теоретического материала. Следовательно, зная уравнение окружности, можно произвести анализ рынка сбыта и исследовать поведение потребителей (покупателей). Установить более выгодные продажи потребительского характера, а пользуясь в процессе решения формулой канонического уравнения окружности и некоторые из наиболее выгодных способов получения прибыли.

Список литературы

1. Краткий курс высшей математики / Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – АСТ, Астрель, 2001.
2. Математика в экономике: Учебное пособие / В.А. Вербицкий, Т.Н. Беспрозванная, Л.А. Дойхен, Е.Н. Кравченко, Е.В. Кудрявцева, И.В. Ясеновская. – Хабаровск: РИЦ ХГАЭП, 1999.
3. Мелешко С.В., Невидомская И.А. Использование инновационных образовательных технологий в самостоятельной работе студентов при изучении математических дисциплин // Теоретические и прикладные проблемы современной педагогики: сборник научных статей по материалам научно-практической конференции. – Ставрополь, изд-во «АГРУС», 2012.
4. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Задачи с экономическим содержанием на занятиях по дифференциальному исчислению/Актуальные вопросы теории и практики бухгалтерского учета, анализа и аудита: материалы Ежегодной научно-практической конференции, г. Ставрополь, 22-24 марта 2011 г. – Ставрополь: ООО «Альфа-Принт», 2011.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ В СТРУКТУРНОЙ ФОРМЕ МОДЕЛИ

Донец З.Г., Боташева Л.Р., Гочияева А.К.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Структурная форма модели (системы одновременных уравнений) – это система уравнений, в каж-

дом из которых помимо объясняющих (независимых) переменных могут содержаться объясняемые (зависимые) переменные из других уравнений. Уравнения, составляющие исходную модель, называются структурными уравнениями модели.

Простейшая структурная форма модели имеет вид:

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_{12} \cdot y_2 + \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \varepsilon_1,$$

$$y_2 = \alpha_2 + \beta_{21} \cdot y_1 + \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \varepsilon_2,$$

где y_1, y_2 и x_1, x_2 – зависимые и независимые переменные; ε_1 и ε_2 – случайные слагаемые; $\alpha_1, \beta_{12}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2, \beta_{21}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ – параметры модели.

Параметры структурной формы модели называются структурными коэффициентами.

Структурная форма модели включает в систему не только уравнение, отражающее взаимосвязи между отдельными переменными, но и уравнения, отражающие тенденцию развития явления – функции времени, а также разного рода уравнения-тождества. Тождества не содержат каких-либо подлежащих оценке параметров, а также не включают случайных слагаемых.

Структурные коэффициенты можно однозначно выражать через приведенные коэффициенты, или они могут иметь несколько разных оценок, но совсем не выражаться через них.

В процессе оценивания параметров одновременных уравнений следует различать эндогенные (внутренние, зависимые) и экзогенные переменные. Эндогенными считаются переменные, значения которых определяются внутри модели. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений системы. Экзогенными (внешними, независимыми) считаются переменные, значения которых определяются вне модели. Это заданные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Структурный коэффициент называется идентифицируемым, если его можно точно вычислить на основе приведенных коэффициентов, точно идентифицируемым, если он имеет единственную оценку, и сверхидентифицируемым, если он имеет несколько разных оценок. В противном случае он называется неидентифицируемым.

Структурное уравнение является идентифицируемым, если идентифицируемы все его коэффициенты. Если хотя бы один структурный коэффициент неидентифицируем, то и все уравнение является неидентифицируемым.

Модель считается идентифицируемой, если каждое ее уравнение идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель является неидентифицируемой.

В случае неидентифицируемости структурной модели в нее необходимо ввести новые переменные, с помощью которых можно было бы добиться идентифицируемости модели. Рассмотрим модель спроса и предложения:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + u^D,$$

$$\text{уравнение предложения: } y^S = \delta + \varepsilon \cdot P + u^S,$$

$$\text{тождество равновесия: } y^D = y^S = y,$$

где P – цена товара; α, β, γ и ε – параметры; u^D и u^S – случайные слагаемые.

Переменные y, P являются эндогенными, их значения определяются в процессе установления рыночного равновесия.

В рассматриваемой модели нет экзогенных переменных, поэтому ни одно из этих уравнений не является идентифицируемым. Чтобы модель имела статистическое решение, в нее необходимо ввести экзогенные переменные.

Если все продавцы товара облагаются специальным налогом T , который они должны платить с выручки, то данные об этом налоге могут быть включены в состав данных, используемых для анализа. При этом уравнения спроса останутся неизменными, если переменная P означает рыночную цену, а уравнение предложения изменится. Система примет вид:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + u^D,$$

$$\text{уравнение предложения: } y^S = \delta + \varepsilon \cdot P + \sigma \cdot T + u^S,$$

$$\text{тождество равновесия: } y^D = y^S,$$

где T – экзогенная переменная; σ – дополнительный параметр.

Уравнение спроса будет идентифицируемым, поскольку переменная T не включена в него и может выступать в качестве инструментальной для переменной P , а уравнение предложения – неидентифицируемым.

В уравнение спроса можно включить переменную x – доход на душу населения, при этом система примет вид:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + \gamma \cdot x + u^D,$$

$$\text{уравнение предложения: } y^S = \delta + \varepsilon \cdot P + \sigma \cdot T + u^S,$$

$$\text{тождество равновесия: } y^D = y^S,$$

где x – экзогенная переменная – доход на душу населения; γ – дополнительный параметр.

Экзогенную переменную x можно использовать в качестве инструментальной переменной для уравнения спроса. В итоге полученная модель представляет собой точно идентифицируемую модель спроса и предложения.

В некоторых случаях неидентифицируемая модель может быть превращена в идентифицируемую путем задания соотношения между структурными коэффициентами. Такой метод носит название метода ненулевого ограничения. Рассмотрим этот метод на примере неидентифицируемой модели спроса и предложения:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + u^D,$$

$$\text{уравнение предложения: } y^S = \delta + \varepsilon \cdot P + \sigma \cdot T + u^S,$$

$$\text{тождество равновесия: } y^D = y^S,$$

где P – цена товара; T – экзогенная переменная – налог с продаж; $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ и σ – параметры; u^D и u^S – случайные слагаемые.

Улучшить спецификацию модели можно, введя ограничение на коэффициенты $\sigma = \varepsilon$. Тогда система исходных данных – структурных уравнений преобразуется к виду:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + u^D,$$

$$\text{уравнение предложения: } y^S = \delta + \varepsilon \cdot (P - E) + u^S,$$

$$\text{тождество равновесия: } y^D = y^S.$$

Благодаря введению ограничения на коэффициенты уравнение предложения стало идентифицируемым. Действительно, преобразованную систему можно рассмотреть как новую версию модели – систему из 4 уравнений:

$$\text{уравнение спроса: } y^D = \alpha + \beta \cdot P + u^D,$$

уравнение предложения: $y^S = \delta + \varepsilon \cdot P_1 + u^S$,

тождество цены товара для продавца $P_1 = P - T$,

тождество равновесия: $y^D = y^S$,

где P_1 – цены товара для продавца (сумма, остающаяся у продавца после уплаты налога).

Последние два уравнения системы являются уравнениями-тождествами и не требуют проверки на идентификацию. Переменная T не включена в уравнение спроса, поэтому она может быть использована в качестве инструментальной для переменной P . В результате с помощью метода наименьших квадратов можно получить уравнение регрессии вида:

$$\hat{P}_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot T,$$

где γ_0 и γ_1 – коэффициенты, подлежащие оценке.

Так как переменная T не включена в уравнение предложения, то она также может использоваться в качестве инструментальной для переменной P_1 . Полученная модель в целом является точно определенной (точно идентифицируемой).

Таким образом, наличие ограничения на коэффициенты системы уравнений (называемого ненулевым ограничением) позволяет исключить одну объясняющую переменную из уравнения. Если эта переменная эндогенная, для нее не нужно искать инструментальную переменную; если экзогенная, то она может использоваться в качестве инструментальной для одной из эндогенных переменных, оставшихся в уравнении.

Модель спроса и предложения также можно использовать:

- когда необходимо установить характер изменения издержек производства, если известен вид функции затрат;

- когда надо найти предельные издержки производства при данном объеме выпуска, если известна функция затрат;

- когда необходимо установить зависимость спроса от цены на него;

- при нахождении предельного спроса на товар при данной цене, если известна зависимость спроса на товар от цены на него.

Список литературы

1. Сидин, Э.Ф. Экономико-математические модели. – М., 2000.
2. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Особенности применения методов математического моделирования в экономических исследованиях. // Кант: Экономика и управление. 2013. № 1. С. 62-66.
3. Носко, В.П. Эконометрика. – М., 2011. Кн. 2 – 576 с.
4. Мамаев И.И., Шибанов В.П. Современные подходы реализации контроля качества высшего профессионального образования // Вестник Университета (Государственный университет управления). – 2012. – № 18. С. 164-167.

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Донец З.Г., Бабаева Э.З., Шумская В.Ю.

Ставропольский государственный аграрный университет,
Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Запасы создаются на любом предприятии и зачастую причинами их создания являются различия в темпах производства и потребительского спроса. Под запасами можно понимать такое количество материалов, ресурсов, с помощью которого ведется непрерывно выпуск товаров. Ими же могут являться и сезонные товары, находящиеся в резерве выпускаемой продукции. Следовательно, сезонность является одной из важнейших причин создания запасов. На наш взгляд важно также отметить тот факт, что создание запасов является очень затратным процессом – их необходимо где-то хранить. К тому же, в процессе хранения, большинство запасов теряет свои характе-

ристики и морально устаревают. Соответственно возникают разного рода проблемы в управлении этими запасами [1].

Сущность управления запасами заключается в установлении баланса между объемами заказа и вновь прибывшей партии товара.

Для более эффективного управления, использования создаются различные методы, модели теории управления запасами. Системы управления запасами можно классифицировать по различным признакам: по месту хранения, по виду запасов, по их свойствам, информационным характеристикам и так далее. В связи с этим очень сложно построить такую модель, которая удовлетворяла бы все условия запасов [2].

Оптимальное управление запасами достигается за счет правильного выбора объема и времени поставки. Это достигается тогда, когда суммарные издержки производства являются минимальными.

В данной статье мы рассмотрим несколько моделей управления запасами.

Самой распространенной и наиболее часто применяемой, является модель оптимального размера заказа. В данной модели спрос (D) в рассматриваемый период времени постоянен, как и цена приобретения (P), а расходы на хранение (H) здесь определяются как постоянная сумма издержек на единицу товара:

$$H = P \times i,$$

где i – коэффициент затрат на хранение запасов.

Оптимальный размер заказа рассчитывается по следующей формуле:

$$Q = \sqrt{\frac{2CD}{H}} = \sqrt{\frac{2CD}{Pi}}$$

C – затраты на размещение одного заказа; Q – размер заказа; L – цикл заказа;

Точка заказа (PL) будет равна:

$$PL = DL.$$

А время (t) между заказами:

$$t = \frac{Q}{D}.$$

Учитывая тот факт, что спрос и цена в данной модели постоянны, то важно отметить то, что точки зрения оптимизации суммарных затрат на управление запасами они не представляют абсолютно никакого интереса. В данной модели имеет место оценка затрат на оформление заказа и затрат на хранение (z):

$$z = 3_H O + 3_H X = \frac{CD}{Q} + \frac{QH}{2} = \sqrt{2CDH} \quad [4].$$

Рассмотрим данную модель, для более точного понимания, на примере.

Оптовый продавец имеет спрос на 300 единиц товара X в месяц. Затраты на приобретение единицы товара со стороны покупателей составляет 80 рублей. Затраты на хранение единицы товара со стороны оптовика равны 15% от его среднегодовой стоимости. Стоимость оформления одного заказа составляет 150 рублей, независимо от количества. Необходимо рассчитать оптимальный размер заказа и все значимые затраты.

Итак, необходимо ввести обозначения:

$$C = 150$$

$$H = Pi = 80 \cdot \frac{0,15}{12} = 1$$