$n-1$. Матрица-столбец напротив не имеет правых делителей нуля и всегда имеет левый делитель нуля вида $\begin{bmatrix} 0_{(m-r)\times r} & I_{m-r} \end{bmatrix}$, размера $(m-1)\times m$ и ранга $m-1$.

Теперь можно вернуться к проблеме выборочной эквивалентности.

Пусть у матрицы α, соответствующей оператору A, существует левый делитель нуля $\overline{\alpha}^L$, а у матрицы β, соответствующей оператору B, – правый делитель нуля $\overline{\beta}^R$, тогда согласно свойству «c» из $\beta F\alpha = \beta F^*\alpha$ вытекает тождество

$$\beta F\alpha = \beta\underbrace{(F + \eta\overline{\alpha}^L + \overline{\beta}^R\mu)}_{F^*}\alpha,$$

где η и μ – произвольные матрицы соответствующих размеров. В то же время не вызывает сомнения неравенство

$$F \neq \underbrace{F + \eta\overline{\alpha}^L + \overline{\beta}^R\mu}_{F^*}.$$

Таким образом, выборочная эквивалентность систем

$$F \cong F^*$$

не предполагает их полной эквивалентности. И только при условии $\overline{\alpha}^L = 0$ и $\overline{\beta}^R = 0$ справедливо тождество $F = F^*$, а выборочная эквивалентность совпадает с полной эквивалентностью.

Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования.2012. № 2. С. 81-82.
2. Косьянчук В.В., Константинов С.В., Колодяжная Т.А., Редько П.Г., Кузнецов И.П. Перспективный облик отказоустойчивых цифровых систем управления маневренных ЛА // Полет. 2010. № 2.
3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. 2012. № 11.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Использование математических методов для анализа динамических свойств управляемого объекта // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: сб. материалов III Международной научно-практической конференции / СтГАУ. – Ставрополь: Бюро новостей, 2012.– С. 163-167.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Гулай Т.А., Оразаджиев М.Ф., Вечерка Д.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Согласно проведенным исследованиям одной из весьма распространенных форм представления математических моделей являются так называемые передаточные функции для скалярной системы и матричные передаточные функции для матричной системы. Эти функции представляют собой записанную в явном операторном виде непосредственную связь сигналов на выходе системы с входными воздействиями.

Возьмем за основу операторное уравнение $A(p)y(t) = B(p)u(t) + y_0(p)$. Принципиально то, что матрица $A(p)$ всегда является квадратной и в общем случае имеет вид

$$A(p) = A_\mu p^\mu + A_{\mu-1}p^{\mu-1} + \ldots + A_1 p + A_0.$$

Или

$$A(p) = [a_{ij}(p)] = [a_{ij,\mu}p^\mu + a_{ij,\mu-1}p^{\mu-1} + \ldots + a_{ij,1}p + a_{ij,0}],\ \ i, j = \overline{1,m}.$$

Матрица $B(p)$ имеет аналогичный вид с учетом ее размера $m\times s$. Здесь m – старшая степень полинома, часто называемая порядком полинома; i, j – номера соответственно строки и столбца, которым принадлежит записанный элемент матрицы. Будем полагать, что $A(p)$ и $B(p)$ – взаимно просты слева, если они не имеют общих левых делителей, отличных от единичной (точнее, унимодулярной)[1] матрицы.

В случае скалярных систем $A(p)y(t) = B(p)u(t) + y_0(p)$ представляет собой скалярное уравнение. Матрицы $A(p)$ и $B(p)$ вырождаются в скалярные полиномы $a(p)$ и $b(p)$. Переход от этой записи к записи

$$y(p) = f_y^u(p)u(p) + f_y^0(p)y_0(p)$$

осуществляется формально делением всего уравнения на полином $a(p)$.

Конструкция $y(p) = f_y^u(p)u(p) + f_y^0(p)y_0(p)$ в теории автоматического регулирования получила название оператора системы, включающего две дроби

$$f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)};$$

$$f_y^0(p) = \frac{1}{a(p)}.$$

Первая из этих дробей представляет собой передаточную функцию системы от входного воздействия u к выходной величине y (или передаточную функцию по входному воздействию). Эта функция определяет составляющую $y_*(t)$. Вторая дробь представляет собой передаточную функцию от начальных условий системы, выраженных оператором $y_0(p)$, к выходной величине y (или передаточную функцию по начальным условиям). Эта функция определяет составляющую свободного или собственного движения системы.

Значения корней уравнений $a(p) = 0$ и $b(p) = 0$ на комплексной плоскости $p = \delta + \omega i$ получили названия полюсов $\lambda_i : a(\lambda_i) = 0$ и нулей $\gamma_j : a(\gamma_j) = 0$ передаточной функции $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ соответственно. При объединении полюсов передаточной функции $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, используют обозначение $\Re = \{\lambda_i : a(\lambda_i) = 0\}$, а нулей – $\Im = \{\gamma_j : b(\gamma_j) = 0\}$.

Множество корней характеристического уравнения $a(p) = 0$ скалярной системы называется спектром передаточной функции или спектром системы.

Заметим, что полюсы и нули содержат всю информацию о динамических свойствах скалярной линейной системы. Так, полюсы, полностью определяя передаточную функцию $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, отражают характер внутренних связей в системе. Они показывают, как система ведет себя «вне связи» с внешним

[1] Обратимой матрицы с единичным детерминантом.

миром. При исследовании только собственных или свободных движений системы достаточно анализировать размещение полюсов на комплексной плоскости (модальный анализ). Нули же (наряду с полюсами) отражают свойства передаточной функции $f_y^u(p)=\dfrac{b(p)}{a(p)}$ и показывают характер связей системы с ее окружением, т.е. с внешними воздействиями, поступающими на вход.

Теперь перейдем к системам, имеющим несколько (s) входов и несколько (m) выходов. В случае, когда степень характеристического полинома $\det A(p)$ равна порядку n, система $A(p)y(t)=B(p)u(t)+y_0(p)$ считается нормализуемой, поскольку ее можно разрешить относительно высших производных. Действительно, путем обращения матрицы $A(p)$ из уравнения $A(p)y(t)=B(p)u(t)+y_0(p)$ может быть получена конструкция

$$y(p)=F_y^u(p)u(p)+F_y^0(p)y_0(p)$$

где введены следующие дробно-рациональные полиномиальные матрицы:

$$F_y^u(p)=A^{-1}(p)B(p)=\left[f_{ij}^u(p)\right]$$

$$F_y^0(p)=A^{-1}(p)=\left[f_{ij}^0(p)\right]$$

с аналогичным $f_y^u(p)=\dfrac{b(p)}{a(p)}$ смыслом.

В подавляющем большинстве работ по матричным (многосвязным) системам исследуется только $F_y^u(p)=A^{-1}(p)B(p)=\left[f_{ij}^u(p)\right]$. Матрица $F_y^u(p)$ размера $m\times s$ представляет собой совокупность $m\times s$ скалярных передаточных функций $f_{ij}^u(p)$. Каждая такая функция является скалярной передаточной функцией от j-го входа к i-му выходу. Такая матрица формализует интуитивное представление об обобщении скалярного случая на многомерный .

В общем случае матричные передаточные функции имеют алгебраическую особенность в виде некоммутативности, т.е. они не допускают изменения порядка следования при умножении. Последовательное соединение двух матричных систем соответствует записи

$$y=F_{1\bullet 2}^u u=F_1^u F_2^u u\ .$$

Сигнал здесь вначале проходит систему с матрицей передаточных функций F_2^u , а затем F_1^u . Каждый элемент обобщенной матрицы $F_{1\bullet 2}^u(p)$ передаточных функций определяется формулой, которую, не принимая во внимание сократимость полиномиальных дробей, можно записать в виде

$$f_{1\bullet 2,ij}^u(p)=\sum_k f_{1,ik}^u(p)f_{2,kj}^u(p)=\frac{\sum_q\left[b_{1,iq}b_{2,qj}\prod_{k\neq q}a_{1,ik}a_{2,kj}\right]}{\prod_k a_{1,ik}a_{2,kj}}.$$

где в числителе фигурирует суммирование полиномов. Собственные значения полиномиальных уравнений

$$\sum_q\left[b_{1,iq}(p)b_{2,qj}(p)\prod_{k\neq q}a_{1,ik}(p)a_{2,kj}(p)\right]=0\,.$$

для каждой новой скалярной передаточной функции определяются непосредственным вычислением. Множество полюсов для скалярной передаточной функции образуется объединением множеств полюсов j-го столбца первой системы и i-ой строки второй системы по ходу сигналов.

Формула

$$f_{1\bullet 2,ij}^u(p)=\sum_k f_{1,ik}^u(p)f_{2,kj}^u(p)=\frac{\sum_q\left[b_{1,iq}b_{2,qj}\prod_{k\neq q}a_{1,ik}a_{2,kj}\right]}{\prod_k a_{1,ik}a_{2,kj}},$$

а точнее возникновение сложности в вычислении нулей (именно нулей), показывает, что переход от скалярных систем к матричным системам путем, как часто говорили, простого обобщения, не имеет под собой формальных оснований. Матричные системы представляют собой качественно новые объекты теории систем.

Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. 2012. № 2. С. 81-82.
2. Косьянчук В.В., Константинов С.В., Колодяжная Т.А., Редько П.Г., Кузнецов И.П. Перспективный облик отказоустойчивых цифровых систем управления маневренных ЛА // Полет. 2010. № 2.
3. Долгополова А.Ф.,Гулай Т.А.,Литвин Д.Б.,Мелешко С.В.Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. 2012. № 11.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Использование математических методов для анализа динамических свойств управляемого объекта // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: сб. материалов III Международной научно-практической конференции / СтГАУ. – Ставрополь: Бюро новостей, СтГАУ, 2012. – С. 163-167.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ N-МЕРНОГО ВЕКТОРА

Дворецкая В.И., Сокольская Е.Е., Родина Е.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

N-мерный вектор и векторное пространство являются предметом изучения линейной алгебры и представляют немалый интерес в науке и исследованиях. Так как они носят не только теоретический характер, но и имеют вполне реальное практическое применение в современном мире. Ведь знание фундаментальных основ линейной алгебры, а в частности ее раздела аналитической геометрии способствует формированию специализированных знаний, представляющий собой синтез профессиональных навыков и умений узких специалистов, и широких общенаучных фундаментальных знаний.

И если раньше научный интерес вызывал исключительно геометрический анализ экономических задач, то в наши дни объединение таких наук как физика и информатика с данным разделом высшей математики, является весьма прогрессивным направлением.

Особенно в связи с появлением все большего количества портативных гаджетов на операционных мобильных системах, таких как всем известные титаны Android и IOS, BlackBerry OS, Windows Mobile не пользующиеся такой же огромной популярностью, а так же мало известные новички рынка операционных систем Tizen, Sailfish,Firefox OS, Ubuntu Mobile.

Мы тесно контактируем с этим разделом векторной алгебры, сами того не замечая, а ведь все мобильные приложения на наших телефонах, в которых применяется позиционирование экранных кнопок, работа с камерой и ее направлением, изменение скоростей объектов и.т.д., основаны на свойствах n-мерных векторов, векторных пространств и действиями над ними.