блемы современной педагогики / Сб. научных статей по материалам научно-практической конференции. – Ставрополь, из-во «АГРУС», 2012. – С. 67-73.

ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ, СТРУКТУРЫ ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ И ВЫБОРОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ

Гулай Т.А., Семенов Д.В., Кудрина Ю.Г.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Согласно проведенным исследованиям делителем нуля $\overline{A}$ некоторой заданной матрицы A называется такая матрица, произведение которой с матрицей A тождественно равно нулю. Механизм действия делителей нуля основан на использовании линейной зависимости столбцов (правый делитель) и строк (левый делитель) матрицы *A*.

Матрица *A* размера $(m \times n)$ имеет правый делитель нуля, если можно подобрать такую другую матрицу $\overline{A}^R$, содержащую n строк и произвольное число q столбцов, что всегда выполняются тождество и два неравенства

$$A\overline{A}^R = 0_{m\times q}, \qquad A \neq 0_{m\times n}, \qquad \overline{A}^R \neq 0_{n\times q}$$

где $0_{i\times k}$ – нулевая матрица размера $(i\times k)$.

Итак, нулевое значение произведения матриц $A\overline{A}^R$ обусловлено тем, что используются соответствующие комбинации только линейно зависимых столбцов. Если матрица *A* не содержит линейно зависимых столбцов, то у нее не может быть правого делителя нуля. У матрицы, имеющей только линейно независимые столбцы, правый делитель нуля равен нулевой матрице (нулю).

Правый делитель нуля может содержать неограниченное число столбцов, т.е. неограниченное число вариантов комбинирования линейно зависимых столбцов матрицы *A*. В то же время для n столбцов этой матрицы могут существовать только $r_R \leq n$ их линейно независимых комбинаций, тождественно равных нулю. Крайний случай $r_R = n$ соответствует матрице *A*, все столбы которой нулевые. Если у матрицы есть хотя бы один ненулевой столбец, то $r_R = n-1$ и т.д. В общем случае число r_R равно размерности ядра оператора *F*.

В дальнейшем будем полагать, что для матрицы *A* правый делитель нуля $\overline{A}^R$ имеет размер $(n\times r_R)$ и максимальный, т.е. равный r_R, ранг. В таком случае охватывается все возможные линейно независимые конструкции, а значит и вообще все возможные конструкции соответствующих делителей нуля.

Если у матрицы *A* имеется левый делитель нуля, значит можно подобрать такую другую матрицу $\overline{A}^L$ размера $l\times m$, что всегда выполняется

$$\overline{A}^L A = 0, \qquad \overline{A}^L \neq 0, \qquad A \neq 0$$

Левый делитель нуля оперирует со строками матрицы *A*. Из m строк матрицы A могут быть составлены не более $r_L \leq m$ линейно независимых комбинаций, тождественно равных нулю. Соответственно r_L – размерность левого нуль-пространства отображения, задаваемого матрицей *A*, размерность коядра оператора F. Для определенности также будем полагать, что левый делитель нуля имеет размер $(r_L \times m)$ и максимальный ранг r_L.

Левые матричные делители нуля обладают следующими свойствами:

транспонирование	$(\overline{A}^L A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(\overline{A}^L)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}\overline{A^{\mathrm{T}}}^R$,
умножение на обратимую матрицу S	если $\det S \neq 0$, то $\overline{A}^L A = \overline{A}^L S^{-1} SA = \overline{(SA)}^L (SA)$,
умножение на произвольную матрицу π	$\overline{A}^L A = \pi \overline{A}^L A$, $\pi = \mathrm{var}$,
нильпотентная конструкция матриц индекса 2 с произвольной матрицей κ	$(A\kappa\overline{A}^L)^2 = 0_{n\times n}$, $\kappa = \mathrm{var}$,
делители нуля произведения матриц с сохранением ранга	если $\mathrm{rank}\, AB = \mathrm{rank}\, A$, то $\overline{AB}^L = \overline{A}^L$,
делители нуля произведения матриц с понижением ранга	если $\mathrm{rank}\, AB < \mathrm{rank}\, A$, то $\mathrm{rank}\,\overline{AB}^L > \mathrm{rank}\,\overline{A}^L$
обратимость сводной матрицы	если $m > n$ и $\mathrm{rank}\, A_{m\times n} = n$, то $\det\begin{bmatrix} A_{m\times n} & (\overline{A}^L_{(m-n)\times m})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{m\times m} \neq 0$

Правые матричные делители нуля обладают следующими свойствами:

транспонирование	$(A\overline{A}^R)^{\mathrm{T}} = (\overline{A}^R)^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \overline{A^{\mathrm{T}}}^L A^{\mathrm{T}}$,
умножение на обратимую матрицу S	если $\det S \neq 0$, то $A\overline{A}^R = ASS^{-1}\overline{A}^R = (AS)\overline{(AS)}^R$,
умножение на произвольную матрицу μ	$A\overline{A}^R = A\overline{A}^R\mu$, $\mu = \mathrm{var}$,
нильпотентная конструкция матриц индекса 2 с произвольной матрицей η	$(\overline{A}^R \eta A)^2 = 0_{n\times n}$, $\eta = \mathrm{var}$,
делители нуля произведения матриц с сохранением ранга	если $\mathrm{rank}\, BA = \mathrm{rank}\, A$, то $\overline{BA}^R = \overline{A}^R$,
делители нуля произведения матриц с понижением ранга	если $\mathrm{rank}\, BA < \mathrm{rank}\, A$, то $\mathrm{rank}\,\overline{BA}^R > \mathrm{rank}\,\overline{A}^R$
обратимость сводной матрицы	если $m < n$ и $\mathrm{rank}\, A_{m\times n} = m$, то $\det\begin{bmatrix} A_{m\times n} \\ (\overline{A}^R_{n\times(n-m)})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}_{n\times n} \neq 0$.

Первые три свойства очевидны и проверяются непосредственным вычислением, например,

$$(\overline{A}^R \eta A)^2 = \overline{A}^R \eta A \overline{A}^R \eta A = \overline{A}^R \eta 0_{r\times r} \eta A = 0_{n\times n}$$

Свойства «с» предоставляют возможность при формировании делителей нуля без ущерба для общности результата в качестве ненулевых элементов записывать различные фиксированные числа, например единицы. Произвольность матричных множителей p и m с любым (подходящим по контексту) числом строк и столбцов соответственно порождает всю совокупность элементов класса. Можно сказать и иначе. Для левого матричного делителя нуля максимального ранга: линейные комбинации его строк порождают все другие левые матричные делители нуля. Для правого матричного делителя нуля максимального ранга: линейные комбинации его столбцов порождают все другие правые матричные делители нуля.

Свойства «*e*», «*f*» вытекают из определения ядра и коядра. Ядро отображения, задаваемого матрицей $A_{m\times n}$, имеет размерность $n-\operatorname{rank} A$, в то же время, ядро произведения матриц *BA* имеет размерность $n-\operatorname{rank} BA$. В соответствии с неравенством Сильвестра ранг произведения матриц не может превышать рангов сомножителей. Таким образом, в случае совпадения рангов (свойство «е») непосредственно из формул произведения *AB* и *BA* видно, что все делители нуля матрицы *A* будут таковыми для произведения матриц и наоборот. В противном случае (свойство «*f*») у произведения матриц *AB* и *BA* в связи с понижением ранга у делителей нуля $\overline{AB}^L$ и $\overline{BA}^R$ возникают дополнительные по сравнению с делителями $\overline{A}^L$ и $\overline{A}^R$ строки и столбцы соответственно.

Свойство «g» связано со следующим. Во-первых, число линейно независимых строк левого делителя нуля (столбцов правого делителя нуля) прямоугольной матрицы всегда дополняет число столбцов (строк) этой матрицы до числа строк (столбцов). Во-вторых, строки левого делителя (столбцы правого делителя) такой матрицы и строки (столбцы) самой матрицы всегда в совокупности линейно независимы.

Далее, если у прямоугольной матрицы С существует правый делитель нуля $\overline{C}^R$, тогда независимо от числа столбцов r_R этого делителя имеет место лемма об обращении $\beta F\alpha = \beta F * \alpha$

$$(I_n + \overline{C}^R \chi C)^{-1} = I_n - \overline{C}^R \chi C$$

$$(I_n - \overline{C}^R \chi C)^{-1} = I_n + \overline{C}^R \chi C$$

где *с* – произвольная матрица соответствующего размера.

Рассмотрим сейчас структуру делителей нуля.

Если определение делителей нуля для исходной матрицы А представляет собой непростую задачу, то для матриц в канонических базисах структуры делителей нуля очевидны. Действительно, матрицы

$$T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix},\ T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$$

содержат блоки только двух типов: единичные и нулевые. Ясно, что все строки и столбцы этих матриц, пересекающие единичные блоки, линейно независимы между собой. Таким строкам и столбцам в делителях нуля должны соответствовать нулевые строки и столбцы. В то же время строки и столбцы, пересекающие нулевые блоки, содержат только нулевые элементы и поэтому всегда линейно зависимы. Именно эти нулевые строки и столбцы матриц в канонических базисах используются для формирования делителей нуля.

В силу сказанного для матриц изоморфизмов делители нуля не существуют, точнее, существуют только нулевые делители нуля.

Эпиморфная матрица $T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$ в канонических базисах не содержит ни одной нулевой строки, но имеет $n-m$ нулевых столбцов. Таким образом, у эпиморфизмов отсутствуют левые делители нуля, но могут быть сформированы правые делители нуля, использующие $n-m$ нулевых столбцов, которые по определению линейно зависимы, или столько же их линейных комбинаций.

Правый канонический делитель нуля максимального ранга для матрицы $T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}$ с простейшей (канонической) структурой имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} \\ I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Этот делитель имеет $n-m$ линейно независимых столбцов (единичный блок) и *m* нулевых строк.

По аналогии можно придти к выводу, что мономорфизмы с матрицами в канонических базисах

$$T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$$

не имеют правых делителей нуля, а их канонические левые делители нуля представлены матрицами вида

$$\begin{bmatrix} 0_{(m-n)\times n} & I_{m-n} \end{bmatrix}$$

Здесь делитель нуля имеет ранг $m-n$, и именно столько линейно независимых комбинаций строк матрицы А могут дать нулевые значения.

Для общего (гомоморфного) случая

$$T_y FT_x^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

характерно наличие левых и правых делителей нуля одновременно. Им соответствуют следующие канонические записи: для правых делителей нуля

$$\begin{bmatrix} 0_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$$

и для левых делителей нуля

$$\begin{bmatrix} 0_{(m-r)\times r} & I_{m-r} \end{bmatrix}$$

Число возможных линейно независимых комбинаций столбцов матрицы А, имеющих нулевые значения, согласно $\begin{bmatrix} 0_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$ равно $n-r$, а строк – согласно $\begin{bmatrix} 0_{(m-r)\times r} & I_{m-r} \end{bmatrix}$ равно $m-r$.

Обратим внимание на делители нуля матрицы-строки и матрицы-столбца. По определению эти оба типа матриц имеют максимальный ранг, равный единице. Отсюда следует, что у матрицы-строки нет левых делителей нуля, но она всегда имеет правый делитель нуля вида $\begin{bmatrix} 0_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$, размера $n\times(n-1)$ и ранга

$n-1$. Матрица-столбец напротив не имеет правых делителей нуля и всегда имеет левый делитель нуля вида $\begin{bmatrix} 0_{(m-r)\times r} & I_{m-r} \end{bmatrix}$, размера $(m-1)\times m$ и ранга $m-1$.

Теперь можно вернуться к проблеме выборочной эквивалентности.

Пусть у матрицы α, соответствующей оператору А, существует левый делитель нуля $\overline{\alpha}^L$, а у матрицы β, соответствующей оператору В, – правый делитель нуля $\overline{\beta}^R$, тогда согласно свойству «с» из $\beta F\alpha = \beta F^*\alpha$ вытекает тождество

$$\beta F\alpha = \beta\underbrace{(F+\eta\overline{\alpha}^L+\overline{\beta}^R\mu)}_{F^*}\alpha,$$

где η и μ – произвольные матрицы соответствующих размеров. В то же время не вызывает сомнения неравенство

$$F \neq \underbrace{F+\eta\overline{\alpha}^L+\overline{\beta}^R\mu}_{F^*}.$$

Таким образом, выборочная эквивалентность систем

$$F \cong F^*$$

не предполагает их полной эквивалентности. И только при условии $\overline{\alpha}^L = 0$ и $\overline{\beta}^R = 0$ справедливо тождество $F = F^*$, а выборочная эквивалентность совпадает с полной эквивалентностью.

Список литературы

1. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования.2012. № 2. С. 81-82.
2. Косьянчук В.В., Константинов С.В., Колодяжная Т.А., Редько П.Г., Кузнецов И.П. Перспективный облик отказоустойчивых цифровых систем управления маневренных ЛА // Полет. 2010. № 2.
3. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б., Мелешко С.В. Теория вероятностей и математическая статистика // Международный журнал экспериментального образования. 2012. № 11.
4. Литвин Д.Б., Гулай Т.А., Долгополова А.Ф. Использование математических методов для анализа динамических свойств управляемого объекта // Моделирование производственных процессов и развитие информационных систем: сб. материалов III Международной научно-практической конференции / СтГАУ. – Ставрополь: Бюро новостей, 2012.– С. 163-167.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Гулай Т.А., Оразаджиев М.Ф., Вечерка Д.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Согласно проведенным исследованиям одной из весьма распространенных форм представления математических моделей являются так называемые передаточные функции для скалярной системы и матричные передаточные функции для матричной системы. Эти функции представляют собой записанную в явном операторном виде непосредственную связь сигналов на выходе системы с входными воздействиями.

Возьмем за основу операторное уравнение $A(p)y(t) = B(p)u(t) + y_0(p)$. Принципиально то, что матрица $A(p)$ всегда является квадратной и в общем случае имеет вид

$$A(p) = A_\mu p^\mu + A_{\mu-1}p^{\mu-1} + \ldots + A_1 p + A_0.$$

Или

$$A(p) = [a_{ij}(p)] = [a_{ij,\mu}p^\mu + a_{ij,\mu-1}p^{\mu-1} + \ldots + a_{ij,1}p + a_{ij,0}],\quad i,j=\overline{1,m}.$$

Матрица $B(p)$ имеет аналогичный вид с учетом ее размера $m\times s$. Здесь m – старшая степень полинома, часто называемая порядком полинома; i, j – номера соответственно строки и столбца, которым принадлежит записанный элемент матрицы. Будем полагать, что $A(p)$ и $B(p)$ – взаимно просты слева, если они не имеют общих левых делителей, отличных от единичной (точнее, унимодулярной)[1] матрицы.

В случае скалярных систем $A(p)y(t) = B(p)u(t) + y_0(p)$ представляет собой скалярное уравнение. Матрицы $A(p)$ и $B(p)$ вырождаются в скалярные полиномы $a(p)$ и $b(p)$. Переход от этой записи к записи

$$y(p) = f_y^u(p)u(p) + f_y^0(p)y_0(p)$$

осуществляется формально делением всего уравнения на полином $a(p)$.

Конструкция $y(p) = f_y^u(p)u(p) + f_y^0(p)y_0(p)$ в теории автоматического регулирования получила название оператора системы, включающего две дроби

$$f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)};$$

$$f_y^0(p) = \frac{1}{a(p)}.$$

Первая из этих дробей представляет собой передаточную функцию системы от входного воздействия u к выходной величине y (или передаточную функцию по входному воздействию). Эта функция определяет составляющую $y_*(t)$. Вторая дробь представляет собой передаточную функцию от начальных условий системы, выраженных оператором $y_0(p)$, к выходной величине y (или передаточную функцию по начальным условиям). Эта функция определяет составляющую свободного или собственного движения системы.

Значения корней уравнений $a(p)=0$ и $b(p)=0$ на комплексной плоскости $p=\delta+\omega i$ получили названия полюсов $\lambda_i : a(\lambda_i)=0$ и нулей $\gamma_j : a(\gamma_j)=0$ передаточной функции $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$ соответственно. При объединении полюсов передаточной функции $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, используют обозначение $\Re = \{\lambda_i : a(\lambda_i)=0\}$, а нулей – $\Im = \{\gamma_j : b(\gamma_j)=0\}$.

Множество корней характеристического уравнения $a(p)=0$ скалярной системы называется спектром передаточной функции или спектром системы.

Заметим, что полюсы и нули содержат всю информацию о динамических свойствах скалярной линейной системы. Так, полюсы, полностью определяя передаточную функцию $f_y^u(p) = \frac{b(p)}{a(p)}$, отражают характер внутренних связей в системе. Они показывают, как система ведет себя «вне связи» с внешним

[1] Обратимой матрицы с единичным детерминантом.