определяют предельные издержки $y'(x)$ так же, как и затраты на изготовление одного экземпляра продукции.

Приведём пример. Пусть зависимость между издержками продукции «y» и объемом выпускаемой продукции «x» на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определим предельные издержки при объеме продукции x=100 единиц.

Поскольку предельные издержки выражаются производной $y'(x)$, при $x = 100$ предельные издержки составят $y'(100)=10$. Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпущенной продукции 100 единиц) на выпуск единицы дополнительной продукции необходимы дополнительные затраты в 10 денежных единиц. Действительно, затраты на выпуск сто первой единицы продукции можно подсчитать и по другому:

$$y(101) - y(100) = 10 \cdot 101 + 50 - 10 \cdot 100 - 50 = 10$$

Для нашего примера (в случае, когда «y» является линейной функцией от переменной x) разность $y(x+1) - y(x)$ совпадает со значением производной $y'(100)$. В общем же случае (когда функция $y(x)$ может быть нелинейной) при больших «x» разность $y(x+1) - y(x)$ совпадает с $y'(x)$ лишь приближенно.

Как видно, предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величина), а процесс (как изменение экономического объекта). Таким образом, предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса).

Помимо предельных издержек с помощью производной могут быть определены: предельных доход, предельная стоимость, предельный спрос, предельная выручка, предельная производительность труда и другие предельные величины.

Понятно, что использование этих методов имеет немаловажную роль в решении экономических задач различного характера.

Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

Приведём яркий пример применения дифференциального исчисления в экономической теории.

Пусть «x» – количество реализованного товара, R(x) – функция дохода, $C(x)$ – функция издержек (затрат на производство товара). Вид этих функций зависит от способа производства, оптимизации, инфраструктуры и т.п. Обозначим функцию прибыли как $P(x)$. Тогда:

$$P(x) = R(x) - C(x).$$

Очевидно, оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, то есть такое значение выпуска «x», при котором функция $P(x)$ имеет максимум. Следовательно, в этой точке:

$$P'(x) = 0.$$

Но $P'(x) = R'(x) - C'(x)$. Поэтому $R'(x) = C'(x)$, то есть если уровень выпуска продукции «x» является оптимальным для производителя, то:

$$MR(x) = MC(x),$$

где $MR(x)$ – предельный доход; $MC(x)$ – предельные издержки.

Благодаря применению производных, мы получили известное в экономической науке утверждение «Для того, чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны», – что подтверждает, важность использования математического аппарата для доказательства экономических законов.

Таким образом, применение математических методов в экономике не ограничивается применением производных, осуществленным в идеях маржиналистов, а очень широко распространено и постоянно развивается и совершенствуется.

Список литературы

1. Бондаренко В.А., Цыплакова О.Н. Условия формирования математической культуры у студентов экономических направлений // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции. Т.1. Перспективы развития учетно-аналитической работы на предприятиях различных отраслей экономики (Секция факультета «Учетно-финансовый»). Ч.2. / Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 246-248.
2. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Дифференциальное исчисление в задачах экономики // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции. Т.1. Перспективы развития учетно-аналитической работы на предприятиях различных отраслей экономики (Секция факультета «Учетно-финансовый»). Ч.2. / Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 263-265.
3. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Моделирование экономических процессов с использованием методов линейной алгебры // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции. Т.1. Перспективы развития учетно-аналитической работы на предприятиях различных отраслей экономики (Секция факультета «Учетно-финансовый»). Ч.2. / Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 266-268.
4. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Функции нескольких переменных в моделировании экономических процессов // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции. Т.1. Перспективы развития учетно-аналитической работы на предприятиях различных отраслей экономики (Секция факультета «Учетно-финансовый»). Ч.2.: Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 268-271.
5. Родина Е.В., Саакян Л.Г., Федорец Н.П. Экономический смысл производной // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. С. 83-84.
6. Родина Е.В., Шунина А.А., Савельева Е.В. Приложение производной в электроэнергетике // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. С. 86-88.

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Бондаренко В.А., Ханларов С.Т.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

В полной мере теория приложений может быть разработана с применением кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Поэтому в нашей статье нецелесообразно превышать некоторый уровень математической строгости. Навыки работы в этом направлении – вот что будет для нас главным в нашей статье.

Рассмотрим вычисление площадей плоских фигур. Площадь криволинейной фигуры может быть найдена из уже известного геометрического смысла определенного интеграла (рис. 1).

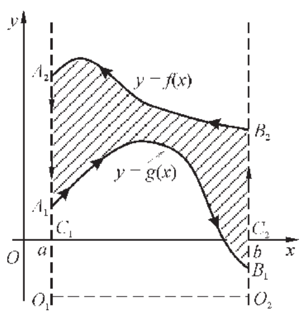

Рис. 1

$$S_{A_1A_2B_2B_1} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Для дальнейших приложений это будет удобно записать в виде криволинейного интеграла (все связанное с криволинейным интегралом, пока следует рассматривать только как удобную форму записи).

$$S=\int_{\gamma}-ydx=\int_{A_1B_1}-ydx+\int_{B_1B_2}-ydx+\int_{B_2A_2}-ydx+\int_{A_2A_1}-ydx=\int_a^b-g(x)dx+0+\int_{\xi}^{\vartheta}f(x)dx=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$$

Для областей с конфигурацией как на рис. 2 более удобной является формула $S=\int_{\gamma}xdy$.

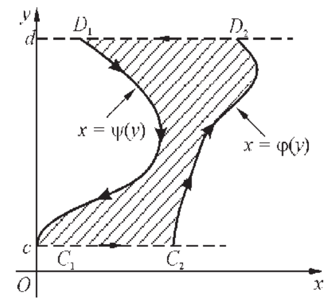

Рис. 2

При обходе областей сложной конфигурации можно разбивать ее на более простые области (пример указан на рис. 3) и для вычисления площадей плоских фигур пользоваться либо формулой $S=\int_{\gamma}-ydx$, либо формулой $S=\int_{\gamma}xdy$, либо комбинированной формулой:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\gamma}xdy-ydx.$$

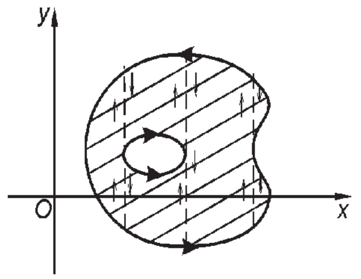

Рис. 3

Если функция, определяющая границу области, задана параметрически

$$\gamma:\{x=x(t),\ y=y(t)\quad t\in[t_0,t_1]\},$$

то последняя формула принимает вид:

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt.$$

Формула для нахождения площади фигуры, граница которой задана в полярных координатах $r=r(\varphi)$ $\varphi\in[\varphi_0,\varphi_1]$, имеет вид: $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}r^2(\varphi)d\varphi$ и получена суммированием площадей элементарных криволинейных треугольников $dS=\frac{1}{2}r^2\sin d\varphi\sim\frac{1}{2}r^2d\varphi$ (рис. 4б, см. пункт 2).

Рассмотрим вычисление длин дуг плоских кривых. Формула для нахождения длина дуги кривой получается суммированием длин элементарных дуг. Длина элементарной дуги в декартовых координатах может быть найдена по формуле Пифагора (рис. 4а):

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

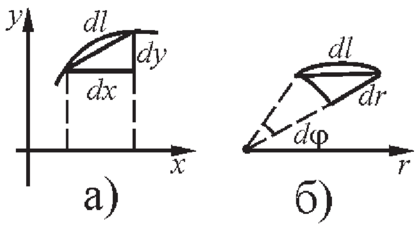

Рис. 4

а) Если кривая задана явно $y=y(x)$, то $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,|dx|$;

б) Если же кривая задана явно $x=x(y)$, то $dl=\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,|dy|$;

в) Для кривой, заданной параметрически, $x=x(t),\ y=y(t)$, получим

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,|dt|.$$

г) В полярной системе координат (рис. б) $dl=\sqrt{dr^2+(rd\varphi)^2}$. В различных частных случаях:

$$dl=\sqrt{1+r^2\left(\varphi_r'(r)\right)^2}\,|dr|=\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r_{\varphi}'(\varphi)\right)^2}\,|d\varphi|=\sqrt{\left(r_t'(t)\right)^2+\left(r(t)\right)^2\left(\varphi_t'(t)\right)^2}\,|dt|.$$

д) формула для нахождения длины дуги кривой, записанная через криволинейный интеграл $L=\int_{\gamma}dl$. Данная формула, с учетом способа задания кривой, может быть переписана с помощью интеграла Римана, например:

$$\gamma:\ y=y(x)\quad x\in[a,b]\qquad L=\int_{\gamma}dl=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$$

Пример. Найти площадь и длину дуги эллипса с полуосями a и *b*.

Зададим эллипс параметрическим уравнением: $x=a\cos t,\ y=b\sin t;\ t\in[0,2\pi]$. Тогда

1) $S=-\int_{\gamma} ydx=-\int_0^{2\pi} b\sin td\,a\cos t=ab\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\pi ab$.

2) $L=\int_{\gamma} dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2-\left(b^2-a^2\right)\sin^2 t}dt=$

$=b\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{a^2}\sin^2 t}\ dt$

Получившийся интеграл – эллиптический интеграл и не выражается через элементарные функции. Его значение может быть найдено численными методами, например, методом прямоугольников, трапеций или Симпсона. Также его значение может быть найдено в справочниках по специальным функциям (например, М. Абрамович, И. Стиган).

Рассмотрим криволинейные интегралы I-го рода.

Для кривой $\gamma:\{\vec r=\vec r(t),\ \ t\in[a,b]\}$ определим

$$\int_{\gamma=AB} f(\vec r)\,dl=\int_a^b f(\vec r(t))\left|\vec r'(t)\right|dt.$$

Так, определенный интеграл называется криволинейным интегралом первого рода.

Физический смысл криволинейного интеграла первого рода: если функция $f(\vec r)$ определяет линейную плотность масс на кривой, то $\int_{\gamma=AB} f(\vec r)\,dl$ определяет массу кривой.

Рассмотрим вычисление площадей поверхностей вращения и вычисление объёмов.

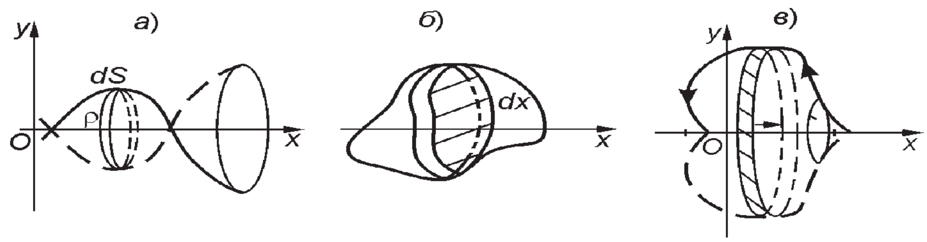

Рис. 5

На рисунках проиллюстрированы формулы:

а) для нахождения объема тела, полученного вращением плоской кривой $y=f(x)$ вокруг оси *Ox*:

$$V=-\int_{\gamma}\pi y^2dx=\int_a^b\pi y^2(x)dx;$$

б) для нахождения объёма тела с известной площадью поперечного сечения:

$$V=\int_a^b S(x)dx;$$

в) для нахождения площади поверхности тела, полученного вращением плоской кривой $y=f(x)$ вокруг оси *Ox*:

$$S=\int_{\gamma}2\pi|y|\,dl.$$

Рассмотрим вычисление моментов и координат центра масс. Статический момент конечной системы материальных точек с массами m_i и радиус-векторами $\vec r_i$ находится по формуле

$$\vec M=\sum_{i=1}^n m_i\vec r_i.$$

Радиус-вектор центра масс будет равен

$$\vec R=\vec M/m,$$

где $m=\sum_i m_i$.

Тогда, если (*x*, *y*, *z*) – декартовы координаты, а S_{xy},S_{xz},S_{yz} – статические моменты системы материальных точек относительно координатных плоскостей xOy, xOz, yOz соответственно, то $S_{xy}=M_z=\sum_i m_iz_i$, $S_{xz}=M_y=\sum_i m_iy_i$, $S_{yz}=M_x=\sum_i m_ix_i$.

А для координат центра масс имеем:

$$x_0=\frac{S_{yz}}{m};\ y_0=\frac{S_{xz}}{m};\ z_0=\frac{S_{xy}}{m}.$$

Для точек, лежащих в одной плоскости с декартовыми координатами (*x*, *y*), если обозначить S_x,S_y статические моменты относительно осей *Ox* и *Oy*, получим формулы:

$$S_x=M_y=\sum_i m_iy_i;\ S_y=M_x=\sum_i m_ix_i.$$

И для центра масс, соответственно

$$x_0=\frac{S_y}{m}=\frac{M_x}{m};\ y_0=\frac{S_x}{m}=\frac{M_y}{m}.$$

Для системы точек, лежащих в плоскости можно говорить и о моментах *k*-го порядка:

$$S_x^k=M_y^k=\sum_i m_iy_i^k,\ S_y^k=M_x^k=\sum_i m_ix_i^k.$$

При этом очевидно, что масса системы точек это момент нулевого порядка, а статические моменты это моменты первого порядка. Моменты второго порядка называются моментами инерции.

Момент инерции системы материальных точек относительно некоторой оси определяется равенством

$$I = \sum_i m_i r_i^2 ,$$

где r_i – расстояния от точек системы до соответствующих осей.

При применении определенного интеграла к вычислению моментов тела разбиваются на тонкие слои из точек «равноудаленных» от соответствующих плоскостей (или осей), и каждый такой слой рассматривается как единое целое.

Пример. Найти статический момент эллипса относительно касательной к эллипсу в его «вершине», если эллипс однороден (плотностью ρ).

Уравнение эллипса: $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 6б).

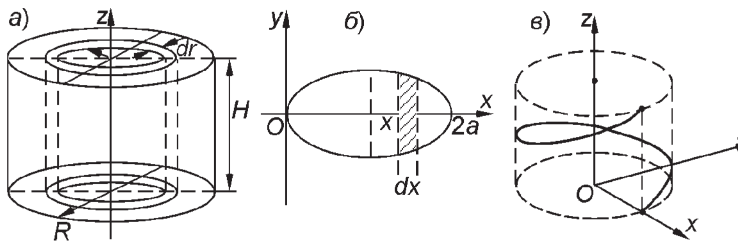

Рис. 6

Разрежем эллипс на элементарные полоски параллельные оси ординат. Так как полоски достаточно узкие, можно считать, что все точки элементарной полоски находятся на одинаковом расстоянии *x* от оси ординат. Площадь элементарной полоски, в таком предположении, равна

$$dS = 2bydx = 2b\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}dx .$$

Умножая площадь на плотность, получим массу элементарной полоски

$$dm = 2b\rho\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}dx .$$

Расстояние от элементарной полости до оси *Oy* $r = x$.

Тогда для статического момента эллиптической пластинки относительно прямой, проходящей через его вершину, параллельно одной из осей (в нашем случае – оси ординат), получаем:

$$S_y = \int_0^{2a} 2b\rho\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}dx = \ldots .$$

При этом плотность может даже зависеть от *x*: $\rho = \rho(x)$.

Список литературы

1. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Дифференциальное исчисление в задачах экономики // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции // Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 263-265.

2. Мамаев И.И., Бондаренко В.А. Моделирование экономических процессов с использованием методов линейной алгебры // Аграрная наука, творчество, рост: материалы Международной научно-практической конференции: Сб. науч. тр. – Ставрополь: «АГРУС» СтГАУ, 2013. – С. 266-268.

3. Родина Е.В., Саакян Л.Г., Федорец Н.П. Экономический смысл производной // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. – С. 83-84.

ВЕРОЯТНОСТЬ КАК ИНСТРУМЕНТ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Вихляева В.В., Попова С.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: dolgopolova.a@mail.ru

Исследованием случайных, неподлежащих строгому математическому описанию, событий и явлений, их свойств, закономерностей и взаимосвязей занимается такой раздел математики как теория вероятностей. Вся деятельность на финансовых рынках попадает под действие законов теории вероятности, так как большинство событий, происходящих на рынке, относится к категории случайных.

В качестве инструмента при анализе и исследовании финансовых рынков применяются альтернативные методики, которые основаны на законах теории вероятностей. С точки зрения математики, вероятность определяется как некоторая мера того: произойдет какое-либо событие или же не произойдет, выраженнаяс помощью чисел. Вероятность может быть нулевой, если событие абсолютно невозможно, или равной единице в том случае, когда событие обязательно наступит. Часто, особенно в экономике,значение вероятности записывается в процентах: от 0% до 100%.

Проблемы риска и неопределенности рассматриваются в экономической теории достаточно широко, и представляют собой отдельное направление исследований. Научные экономические лаборатории, специализирующиеся на управлении рисками, занимаются расчетами вероятностей на основе мощного охвата различных объектов и обширного статистического материала. В силу действия закона больших чиселим удаётся трансформировать непредвиденные потери в постоянные просчитываемые издержки, что позволяет учитывать их в полной мере.В этом случаеони становятся всего лишь производственными издержками, подобными любым другим неизбежным затратам, которые, в свою очередь,можно уже подвергнуть количественной оценке и долгосрочному прогнозированию.

Важным направлением исследований является классификация видов вероятностей. Для более полного понимания сущности страховой защиты выделяют три различных вида вероятностей:

Априорная вероятность. К ней можно отнести все абсолютно однородные случаи, тождественные во всех отношениях, к которым относятся практически полностью предсказуемые исходы событий.

Статистическая вероятность. Её сущностьсостоит в количественной эмпирической классификации случаев и расчете частоты их возникновения на основе теории вероятности. Такая вероятность практически исключает априорное предвидение истинной вероятности. Лучшим способом вычисления вероятности будет изучение большой группы случаев однородного характера, то есть применение принципа движения