Проценты делятся на два вида: простые и сложные. При использовании простых процентов размер вклада будет ежегодно увеличиваться на одну и ту же величину $pX_0/100$. Таким образом, сумма вклада через 1 год будет равняться $X_0(1+p/100)$, через 2 года – $X_0(1+2p/100)$, и мы получим следующий ответ к задаче:

$$X_k=X_0(1+pk/100).$$

Однако на практике в преимущественном большинстве применяются сложные проценты. В отличии от простых процентов, вклад ежегодно будет увеличиваться не на одно и то же число, а в одно и то же $(1+p/100)$ число раз, то есть:

$X_1=X_0(1+p/100)$, $X_2=X_0(1+p/100)^2$ и так далее, следовательно, ответом будет являться:

$$X_k=X_0(1+p/100)^k.$$

Теперь же перейдем непосредственно к задаче о непрерывном начислении процентов. Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а n число раз, то при том же ежегодном приросте p% процент начисления составит за $1/n$-ю часть года p/n%, а размер вклада за k лет при kn начислениях будет равен:

$$X_k=X_0(1+p/100n)^{kn}.$$

Предположим, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ($n=2$), ежеквартально ($n=4$), ежемесячно ($n=12$), каждый день ($n=365$), каждый час ($n=8760$) и так далее, при $n\to\infty$, то есть, непрерывно. Тогда задача будет иметь следующее решение:

$$X_k=\lim_{n\to\infty}\left[X_0\left(1+p/100n\right)^{nk}\right].$$

Можно заметить, что полученная формула напоминает вид второго замечательного предела, о котором упоминалось выше, необходимо лишь дополнить имеющееся уравнение. По свойству пределов вынесем X_0 за знак предела, так как X_0 является числом, а предел константы равен самой константе. Оставшуюся скобку возведем в степень, обратную дроби $p/100n$, с целью перехода ко второму замечательному пределу, и домножим оставшуюся степень nk на $p/100n$ с целью сохранения знака равенства:

$$X_k=X_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+p/100n\right)^{100n/p}\right]^{nkp/100n}=X_0\lim_{n\to\infty}\left[1+p/100n\right]^{kp/100n}.$$

Теперь мы получаем следующий ответ к задаче:

$X_k=X_0\,e^{pk/100}$, где $pk/100$ – ставка непрерывных процентов – является силой роста

Рассмотрим применение полученных формул для решения более конкретной задачи, чтобы выделить разницу в результатах в зависимости от способа начисления процентов.

Возьмем $X_0=1$ денежной единице, $p=5$%, $k=20$ лет.

Первый способ:

Начисление простых процентов

$$X_k=X_0(1+pk/100).$$

$$X_k=1(1+5\cdot 20/100)=2,0000.$$

Второй способ:

Начисление сложных процентов

$X_k=X_0(1+p/100n)^{kn}$

1) $n=1$

$X_k=1(1+5/100\cdot 1)^{1\cdot 20}=2,6355$

2) $n=2$

$X_k=1(1+5/100\cdot 2)^{2\cdot 20}=2,6851$

3) $n=4$

$X_k=(1+5/100\cdot 4)^{3\cdot 20}=2,7015$

4) $n=12$

$X_k=(1+5/100\cdot 12)^{12\cdot 20}=2,7126$

5) $n=365$

$X_k=(1+5/100\cdot 365)^{365\cdot 20}=2,7181$

Третий способ:

Начисление непрерывных процентов

$$X_k=X_0\,e^{pk/100}$$

$$X_k=1\cdot 2,7182\ldots^{5\cdot 20/100}=e=2,7182$$

Таким образом, становится очевидно, что погрешность вычисления вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с результатом по формуле сложных процентов, начисляемых ежегодно ($n=1$), оказалась незначительной, но заметной – около 0,08, в то время как разница между результатом непрерывного начисления и простых процентов равна практически 0,7.

В практических финансово-кредитных операциях крайне редко используются непрерывное начисление процентов, с теоретической точки зрения оно оказывается весьма эффективным, например, при анализе сложных финансовых проблем, таких как обоснование и выбор инвестиционных решений.

В экономике метод математического моделирования сильно развит, так как он помогает взглянуть на упрощенную ситуацию, получить идеальную модель, в данном случае, начисления процентов и сравнить ее с реальной ситуацией, таким образом выявив недостатки существующей системы и, возможно, найти способ их устранения.

В данной работе описан именно такой пример, ведь, если бы не математическое решение и анализ, то разницу между начислением простых и сложных процентов выявить было бы невозможно, а значит, экономика теряла бы средства за счет значительных погрешностей в расчетах.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что непрерывное начисление процентов на практике практически не применимо, однако именно с его помощью осуществляется возможность анализа финансовой ситуации различных коммерческих предприятий, появляются новые цели и задачи развития.

Список литературы

1. Математические модели финансовых операций / С.И. Макров, Л.И. Уфимцева, М.В. Мищенко, Р.И. Горбунова, Л.В. Сергеева, В.И. Фомин Т.Н. Черкасова, Б.П. Чупрынов, Е.Ю. Нуйкина: учебное пособие. – Самара: изд-во СГЭА, 2005. – 136 с.

2. Математика для экономистов. Задачник: учебно-практическое пособие / Р.И. Горбунова М.В. Курганова С.И. Макаров .М.В. Мищенко, Е.Ю. Нуйкина, С.А. Севастьянова, М.М. Семенова, Л.В. Сергеева, Л.И. Уфимцева, В.И. Фомин, Т.Н.Черкасова, Б.П. Чупрынов; под ред. С.И. Макарова, М.В. Мищенко. – М-Кнорус, 2008. – 360 с.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

Серова К.В.

Липецкий государственный технический университет, Липецк, e-mail: kseniya.v.serova@gmail.com

Анализ конечных изменений направлен на решение важной и распространенной на практике задачи поиска величины влияния изменений факторов на изменение определяемого ими результирующего показателя.

Пусть $y=f(x)$ – некоторая функция, характеризующая поведение результативного показателя или процесса; $x_1, x_2,\ldots, x_n$ – факторы, от которых зависит показатель. Задана функциональная детерминированная форма связи изучаемого показателя (y) с набором факторов $x_1, x_2,\ldots, x_n$; $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть результативный показатель (y) получил приращение (Δy) за анализируемый период. Требуется определить, какой частью численное приращение функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ обязано приращению каждого аргумента (фактора) $\Delta x=(\Delta x_i)$ по сравнению с начальным значением. Именно таким образом можно сформулировать основную задачу для рассматриваемого анализа [4].

Для составления рабочих формул необходимо учитывать принцип построения модели и вид, к которому она относится [1, 6, 7].

Аддитивная модель является математическим уравнением, где результативный показатель представлен в виде алгебраической суммы нескольких факторных признаков:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n .$$

Мультипликативная модель отражает прямую пропорциональную зависимость исследуемого обобщающего показателя от факторов:

$$y = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n .$$

Кратная модель результативного показателя y от факторов математически отражается как частное от их деления и имеет следующий вид:

$$y = \frac{x_1}{x_2} .$$

Смешанная модель представляет собой сочетание различных комбинаций аддитивной, мультипликативной и кратной зависимостей [6]. Приведем некоторые примеры такой зависимости:

$$y = (x_1 \pm ... \pm x_n)(x_{n+1} \pm ... \pm x_{n+m}) ,$$

$$y = \frac{x_1 \pm ... \pm x_n}{x_{n+1} \pm ... \pm x_{n+m}} \text{ или } y = \frac{\sum x_1 \cdot ... \cdot x_n}{\sum x_{n+1} \cdot ... \cdot x_{n+m}} .$$

Для изучения изменения показателей и степени их влияния используют разные способы, применение которых зависит от цели и глубины анализа, объекта исследования, технических возможностей выполнения расчетов и т.д.

Широкое распространение в аналитических расчетах получил метод цепных подстановок. Он используется для расчета влияния факторов во всех типах моделей, принцип построения которых приведен выше.

Алгоритм расчета анализируемой модели методом цепных подстановок в случае функции нескольких переменных можно представить в следующем виде:

1) Базовое (плановое) значение результирующего показателя:

$$y_{пл} = \tilde{y}_0 = f(x_1, x_2,..., x_n), \text{ где } n \in Z_+.$$

2) Промежуточные значения результирующего показателя:

$$y_{усл1} = \tilde{y}_1 = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$y_{усл(i)} = \tilde{y}_i = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n), \text{ где } i = 2,...,n\text{-}1.$$

3) Фактическое значение результирующего показателя:

$$y_{ф} = \tilde{y}_n = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n).$$

4) Общее абсолютное изменение результирующего показателя:

$$\Delta y = y_{ф} - y_{пл} = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

5) Изменение результирующего показателя за счет изменения i-го фактора:

$$A_{x_i} = \tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}, \text{ где } i = 1,...,n.$$

При этом остается верным соотношение:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} A_{x_i} = \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} + \tilde{y}_{n-1} - \tilde{y}_{n-2} + ... + \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0 = y_{ф} - y_{пл}. \text{ [5]}$$

Метод цепных подстановок позволяет сделать расчет для любой существующей модели, но его недостаток состоит в том, что он не учитывает распределение неразложимого остатка между существующими факторами, а относит его к последнему в порядке изменения показателю. Таким образом, прирост обобщающего показателя за счёт совместного изменения факторов приписывается влиянию только качественного фактора, т.к. по правилу использования данного метода он заменяется в последнюю очередь. Также, существенным недостатком является то, что в зависимости от выбранного порядка замены факторов, результаты факторного разложения имеют разные значения. В то же время, при замене равноценных факторов (например, качественных) зависимость влияния на прирост фактического результирующего значения не наблюдается [2].

Например, рассмотрим двухфакторную мультипликативную модель $f = xy$, факторы x и y которой получают соответственно приращения Δx и Δy. Тогда результирующий показатель изменится на:

$$\Delta f = f_{ф} - f_{пл} = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + \Delta x y + \Delta x \Delta y.$$

При анализе подобной ситуации можно прийти к тому, что неразложимый остаток ΔxΔy будет отброшен или интерпретирован как логическая ошибка (при достаточно малых значениях приращения факторов в редкой для современной экономики ситуации) [4]. Метод цепных подстановок же приводит к двум различным видам представлений Δf:

$$\Delta f = (y+\Delta y)\Delta x + x\Delta y = A_x + A_y,$$

$$\Delta f = \Delta x y + (x+\Delta x)\Delta y = \overline{A}_x + \overline{A}_y.$$

Как показывает практика, обычно применяется второй вариант при условии, что x – количественный фактор, а y – качественный. В этом случае выражение для оценки влияния качественного фактора $(x+\Delta x)\Delta y$ более активно, поскольку его величина устанавливается умножением приращения качественного фактора на отчётное (фактическое) значение количественного фактора. Тем самым весь прирост обобщающего показателя за счёт совместного изменения факторов ($\Delta x\Delta y$) приписывается влиянию только качественного фактора [5].

Таким образом, задача точного определения роли каждого фактора в изменении результирующего показателя обычным методом цепных подстановок не решается. Но, существует универсальный метод, позволяющий однозначно оценить величины факторного влияния на результирующий показатель – метод конечных приращений, основанный на применении теоретических сведений классического математического анализа.

Именно теорема Лагранжа о среднем дифференциального исчисления сыграла решающую роль в данном аспекте, поэтому именно она стала основой для разработки универсального метода экономического факторного анализа, применимого в условиях произвольных конечных приращений факторов.

Дифференциальная теорема Лагранжа о среднем значении, записанная для функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, позволяет перейти к формуле $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(c_1, c_2, ..., c_n)\Delta x_i$. Т.к. $c_i = x_i + \alpha\Delta x_i \in (x_i; x_i + \Delta x_i)$, где $\alpha \in (0,1)$, то справедлива формула:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, ..., x_n + \alpha\Delta x_n)\Delta x_i,$$

где $\alpha \in (0,1)$ – параметр, который используется при анализе модели, если существует необходимость более тщательного исследования влияния изменения факторов на вариацию результирующего показателя.

Влияние изменения факторов на изменение результирующего показателя имеет следующую формулу, позволяющую решить основную задачу анализа конечных изменений:

$$A_{x_i} = f'_{x_i}(x_1 + \alpha\Delta x_1, x_2 + \alpha\Delta x_2, ..., x_n + \alpha\Delta x_n)\Delta x_i.$$

При этом, $\Delta y = \sum_{i=1}^{n} A_{x_i} = A_{x_1} + A_{x_2} + ... + A_{x_n}$ [5].

Значительное преимущество данного способа заключается в том, что метод конечных приращений (метод Лагранжа) позволяет найти точное значение степени влияния некоторого фактора на изменение результирующего показателя, что, несомненно, даёт не только оптимальный подход к решению, но и подходящий алгоритм для широкого спектра исследований при помощи анализа конечных изменений [3].

Таким образом, можно изобразить различие в расчетах различными методами, представленное на рисунке [2].

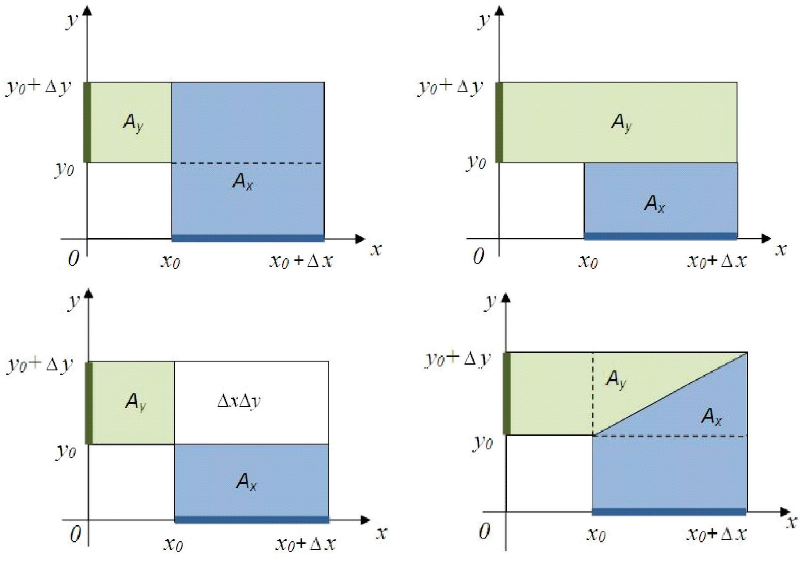

Иллюстрация расчетов различными методами

Для метода конечных приращений характерна высокая точность в расчетах, а также простота составления формул. Таким образом, данный способ разложения функции является наиболее оптимальным по сравнению с методом цепных подстановок.

На практике часто возникает потребность в использовании специализированных методов анализа конечных изменений, которые позволяют учесть дискретную структуру анализируемых факторов, когда оценка влияния на результирующий показатель производится с учетом динамики показателей [5]. В таком случае можно говорить о цепном анализе конечных изменений, который учитывает неоднородность производственных и хозяйственных процессов деятельности предприятия. Таким образом, можно рассматривать данные, которые относятся не только к плановому и фактическому значениям, но и рассчитать факторное влияние для любых составляющих заданной модели. Важным является преобразование полученной динамической постановки задачи анализа конечных изменений к уже известной – статической, используя средневзвешенные (усредненные) значения факторов.

Список литературы

1. Баканов М.И., Мельник М.В., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа. Учебник / Под ред. М.И. Баканова. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 536 с: ил.

2. Блюмин С.Л., Серова К.В. Исследование развития металлургической промышленности методами анализа конечных изменений // Материалы областной научно-практической конференции по проблемам технических наук, 2013 г. – Липецк, 2013. – С. 128-138.

3. Блюмин С.Л., Серова К.В. Сравнительная оценка некоторых методов решения основной задачи экономического факторного анализа // Школа молодых ученых по проблемам технических наук: Материалы областного профильного семинара, 2013 г. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2013. – С. 140-150.

4. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарёв С.В. Основы прикладной математики. Экономические производственные задачи: Учебное пособие. – Липецк: ЛЭГИ, 2000. – 70 с.

5. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарёв С.В. Экономический факторный анализ: Монография. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

6. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия: Учебник. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 536 с.

7. Шеремет А.Д. Теория экономического анализа: Учебник. – 3-е изд., доп. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 352 с.

ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА В НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ СТРУКТУРАХ

Хазиев И.Л., Устинова Е.С., Глущенко А.Г., Глущенко Е.П.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, e-mail: gag646@yandex.ru

При отражении волн от подвижных объектов наблюдается изменение частоты (эффект Доплера), отраженных волн по сравнению с частотой падающих на объект волн [1-3]. Для получения формул частоты отраженных волн обычно используются достаточно наглядные геометрические модели. Более детальное исследование с учетом дополнительных условий может быть проведено с помощью волновой теории [4,5]. На практике довольно часто бывают ситуации, когда звуковая волна падает на подвижное препятствие при непостоянной скорости движения границы раздела сред. Исследование особенности такой ситуации проведем на простой модели.

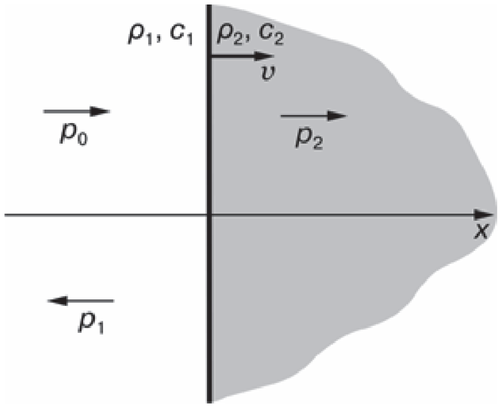

Рис. 1. Пример падающей волны на подвижную границу двух сред

Отражение от равномерно движущейся границы раздела сред. Пусть плоская граница раздела двух сред двигается с постоянной скоростью υ вдоль положительного направления оси Ox (рис.1), причем в момент времени $t = 0$ ее координата $x = 0$. Слева от границы расположена акустическая среда с параметрами ρ_1, c_1, справа – другая среда с параметрами ρ_2, c_2. На границу слева нормально к ней падает плоская гармоническая волна:

$$p_0 = A_0 \exp(-i(\omega t - k_1 x)) = A_0 \exp(-i\omega(t - x / c_1)) . \quad (1)$$

При взаимодействии волны с границей образуются отраженная волна p_1 и прошедшая в другую среду волна p_2. Запишем их в виде плоских гармонических волн со своими амплитудами:

$$p_1 = A_1 \exp(-i\omega(t + x / c_1)) , \; p_2 = A_2 \exp(-i\omega(t - x / c_2)) . \quad (2)$$

Понятно, что p_0, p_1, p_2 удовлетворяют волновому уравнению, но они также должны удовлетворять граничным условиям на подвижной границе, которая изменяет свою координату согласно уравнению $x = \upsilon t$. Итак, граничные условия имеют вид:

$$p_0 + p_1 = p_2 , \; x = \upsilon t , \quad (3)$$

$$\upsilon_{x0} + \upsilon_{x1} = \upsilon_{x2} , \; x = \upsilon t . \quad (4)$$

Подставим (2) в граничное условие (3):

$$A_0 \exp(-i\omega t(1 - \upsilon / c_1)) + A_1 \exp(-i\omega t(1 + \upsilon / c_1)) = A_2 \exp(-i\omega t(1 - \upsilon / c_2)) . \quad (5)$$

Данные соотношения должны выполняться для любого момента времени t. Приравнять показатели экспоненты, по аналогии с уравнением:

$$A_0 \exp(ik_1 y \sin\theta) + A_1 \exp(ik_1 y \sin\theta_1) = A_2 \exp(ik_2 y \sin\theta_2) ,$$

где <<fizmat115.wmf>>, нельзя, поскольку очевидно, что $1 - \upsilon/c_1 \neq 1 + \upsilon/c_1$. Вместе с тем, выбирая амплитуды A_1 и A_2 можно удовлетворить равенство (5), но только для конкретного момента времени t. Такая ситуация говорит о том, что запись отраженной и прошедшей волн в виде (2) не является правильной. В связи с этим, сделаем предположение: пусть отраженная и прошедшая волны остаются плоскими гармоническими волнами, но их частоты отличаются от частоты ω падающей на границу волны. Итак, запишем волны p_1 и p_2 в виде:

$$p_1 = A_1 \exp(-i\omega_1 (t + x / c_1)) ,$$

$$p_2 = A_2 \exp(-i\omega_2 (t - x / c_2)) . \quad (6)$$

Представим граничное условие (3) с учетом формул (6) в виде:

$$A_0 \exp(-i\omega t(1 - \upsilon / c_1)) + A_1 \exp(-i\omega_1 t(1 + \upsilon / c_1)) = A_2 \exp(-i\omega_2 t(1 - \upsilon / c_2)) \quad (7)$$