электростали на структурообразование и пластическую деформацию является целесообразным, поскольку это позволит скорректировать температуру нагрева заготовки из этой стали под прокатку, что повысит качество готового проката [2].

Объектом исследования была рельсовая сталь марки Э76Ф, химический состав которой соответствует ГОСТ 51685 – 2000. Образцы из одной НЛЗ вырезались из трёх зон для проведения испытаний на высокотемпературное кручение по ГОСТ 3565 – 80. Температура испытаний составляла 950, 1050, 1150 и 1250 °С со временем выдержки 5, 10 и 15 минут при каждой температуре. Высокотемпературная пластичность рельсовой стали определялась по числу оборотов до разрушения образца.

Высокотемпературное кручение производилось на установке, состоящей из нагревательной печи и двух валов, один из которых – вращающийся. Скорость вращения вала была приближена к скорости проката чистовой клети рельсобалочного производства (~60 об/мин).

Экспериментально было установлено, что с повышением температуры нагрева возрастает пластичность стали. Максимальное число оборотов до разрушения металла наблюдалось при температуре 1150 °С во всех трех зонах, следовательно, степень деформации сдвига оказывалась максимальной при этой температуре, после чего отмечалось резкое падение пластичности.

Образцы, подверженные нагреву до температур 1150 и 1250 °С и выдержанные в течение 10 минут с дальнейшим испытанием на кручение, изучались металлографически. Отмечается тенденция формирования структур в трех зонах НЛЗ, заключающаяся в образовании двух слоев: 1) частичного поверхностного обезуглероживания; 2) слоя со структурой, соответствующей перегретому состоянию: игольчатый феррит (видманштедт) или ферритная сетка [3].

Образцы, нагретые до температуры 1150 °С с выдержкой 10 минут после кручения имеют слой частичного поверхностного обезуглероживания ~0,2…0,3 мм во всех трех зонах НЛЗ. Ниже наблюдается сплошная ферритная сетка, которая переходит в разорванную на глубине ~0,5…0,6 мм от поверхности. Величина зерна в данной области по ГОСТ 5639-82 – № 4…№ 5.

Образцы из трех зон НЛЗ рельсовой стали, нагретые до 1250 °С с выдержкой 10 минут после кручения имеют различные микроструктуры. В корковой зоне после испытаний поверхностный слой с величиной зерна № 3 представлен структурой видманштедт ~0,15…0,2 мм. Далее слой частичного поверхностного обезуглероживания толщиной ~0,5 мм, плавно переходит в структуру основного металла. В зоне столбчатых кристаллов наблюдается частичное обезуглероживание толщиной ~0,5 мм от поверхности образца, после которой выявлена перегретая структура рельсовой стали с величиной зерна № 2. Наибольшее поверхностное обезуглероживание отмечено в образце центральной зоны НЛЗ (~0,6…0,7 мм), за которым следует структура рельсовой стали с величиной зерна № 1 по всему сечению.

Таким образом, на основе экспериментальных данных установлено, что оптимальной температурой начала прокатки НЛЗ рельсовой стали Э76Ф, является температура 1150 ^{0}С, поскольку при данной температуре отмечаются наилучшие показатели пластичности во всех зонах слитка. Более высокие температуры прокатки способствуют снижению пластичности.

Список литературы

1. Темлянцев М.В., Гаврилов В.В., Корнева Л.В. и др. О выборе температурных режимов нагрева под прокатку непрерывно-литых заготовок рельсовой электростали // Изв. вуз. Чёрная металлургия. – 2005. – № 5. – С. 47-49.

2. Дзугутов М.Я. Пластическая деформация высоколегированных сталей и сплавов. – М.: Металлургия, 1977. – 479 с.

3. Лозинский М.Г. Строение и свойства металлов и сплавов при высоких температурах. – М.: Металлургиздат, 1963. – 535 с.

Физико-математические науки

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ИЗЛУЧАЮЩИМИ МАССАМИ

Турешбаев А.Т., Омарова У.Ш., Бексейтова А.Б.

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, e-mail: ylbosin_kz@mail.ru

Рассматриваются периодические движения вблизи треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел, отличающиеся от соответствующей классической задачи тем, что основные тела, обращающиеся по круговым орбитам, являются излучающими.

Найдены многопараметрические решения задачи вблизи треугольных точек либрации, отвечающих точным решениям соответствующей системы дифференциальных уравнений ограниченной фотогравитационной задачи трех тел.

Доказано, что возможные периодические движения являются плоскими, расположенными в плоскости орбитального движения основных тел.

Показано, что траектории движения частиц в окрестности исследуемых треугольных точек будут эллипсами, полуоси которых зависят от параметров фотогравитационного поля.

Как известно, периодические движения вблизи точек либрации классической ограниченной задачи трех тел исследованы многими авторами [1,2]. В работах [5,6] впервые сформулирована и доказана общая теорема о существовании ляпуновских семейств симметричных периодических движений и строго математически обоснован конструктивный метод численного построения и исследования их устойчивости в обратимой системе. Построение траекторий путем численного интегрирования системы уравнений, поиск симметричного периодического решения, а также способ исследования устойчивости орбиты вокруг коллинеарных точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трех тел успешно реализованы в работе [7].

Поставим задачу определения периодических движений вблизи треугольных точек либраци L_4 и L_5 ограниченной фотогравитационной круговой задачи, дифференциальные которой имеют вид

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial W}{\partial x},\quad \ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial W}{\partial y},\quad \ddot{z}=\frac{\partial W}{\partial z},$$

$$W=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{q_1(1-\mu)}{r_1}+\frac{q_2\mu}{r_2},$$

$$r_1^2=(x+\mu)^2+y^2+z^2,\quad r_2^2=(x+\mu-1)^2+y^2+z^2 \quad (1)$$

Здесь q_1 и q_2 – коэффициенты редукции, зависящие от мощности излучения основных тел и парусности частицы, определяемой отношением «сечение/масса», $1-\mu$ и μ - безразмерные массы основных тел.

Рассмотрим теперь решения системы уравнений (1), близкие к треугольным точкам. Для этого введем обозначения

$$\mathrm{x}=\mathrm{x}_{\mathrm{j}}+\xi,\ \mathrm{y}=\mathrm{y}_{\mathrm{j}}+\eta,\ \mathrm{z}=\mathrm{z}_{\mathrm{j}}+\zeta\ \ (\mathrm{j}=1{,}2),$$

где x_j, y_j, z_j - координаты треугольных точек, которые подставляя в (1), получим уравнения возмущенного движения относительно отклонений ξ, η и ζ, решения которых ищем в виде рядов, расположенных по степеням некоторой произвольной постоянной с коэффициентами, представляющими 2π-периодические функции времени. Применяя метод, предложенный А.М. Ляпуновым [1], запишем уравнения, определяющие первые коэффициенты искомых рядов

$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}-\frac{2}{\lambda}\frac{d\eta^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xx}\xi^{(1)}+a_{xy}\eta^{(1)}\right),$$

$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{2}{\lambda}\frac{d\xi^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xy}\xi^{(1)}+a_{yy}\eta^{(1)}\right),$$

$$\frac{d^2\zeta^{(1)}}{d\tau^2}=\frac{1}{\lambda^2}a_{zz}\zeta^{(1)} \quad (2)$$

Решение (2) ищем в виде

$$\zeta^{(1)}=a''\cos\tau+b''\sin\tau,$$

$$\eta^{(1)}=a'\cos\tau+b'\sin\tau,$$

$$\xi^{(1)}=a\cos\tau+b\sin\tau, \quad (3)$$

и для определения в них неизвестных коэффициентов подставим уравнения (3) в систему (2) и имеем

$$\left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)a+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}a'+\frac{2}{\lambda}b'=0$$

$$\left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)b-\frac{2}{\lambda}a'+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}b'=0$$

$$\frac{a_{xy}}{\lambda^2}a-\frac{2}{\lambda}b+\left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)a'=0$$

$$\frac{2}{\lambda}a+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}b+\left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)b'=0,$$

$$\left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)a''=0,\qquad \left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)b''=0 \quad . \quad (4)$$

где

$$a_{xx}=W_{xx}=3\left[q_1(1-\mu)(x+\mu)^2/r_1^2+q_2\mu(x+\mu-1)^2/r_2^2\right],$$

$$a_{yy}=W_{yy}=3y^2\left[q_1(1-\mu)/r_1^2+q_2\mu(x+\mu-1)^2/r_2^2\right],$$

$$a_{xy}=W_{xy}=3y\ \left[q_1(1-\mu)(x+\mu)/r_1^2+q_2\mu(x+\mu-1)^2/r_2^2\right],$$

$$a_{zz}=W_{zz}=-1.$$

Первые четыре уравнения системы (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}&Aa+0+Ba'+Cb'=0,\\&0+Ab-Ca'+Bb'=0,\\&Ba-Cb+Da'+0=0,\\&Ca+Bb+0+Db'=0,\end{aligned}\quad (5)$$

$$A=1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2},\quad B=1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2},\quad C=\frac{2}{\lambda},\quad D=1+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}$$

Определители системы (5) и двух последних уравнений (4) имеют вид:

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix}A&0&B&C\\0&A&-C&B\\B&-C&D&0\\C&B&0&D\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{1}{\lambda^4}\left[\left(\lambda^2+a_{xx}\right)\left(\lambda^2+a_{yy}\right)-a_{xy}^2-4\lambda^2\right]\right\}^2, \quad (6)$$

$$\Delta_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}\left(\lambda^2+a_{zz}\right)^2.$$

Характеристическое уравнение исследуемой системы распадается на два уравнения:

$$\begin{cases}\lambda^4+\left(4-a_{xx}-a_{yy}\right)\lambda^2+a_{xx}a_{yy}-a_{xy}^2=0,\\ \lambda^2-a_{zz}=0\end{cases} \quad (7)$$

Первое из (7) имеет две пары чисто мнимых корней при выполнении условий

$$0\le\mu(1-\mu)\sin^2(\varphi_1+\varphi_2)\le\frac{1}{36} \quad ,(8)$$

где φ_1,φ_2 и x,y,r_1,r_2 между собой связаны следующими выражениями [8]:

$$\sin\varphi_1=y/r_1,\ \cos\varphi_1=(x+\mu)/r_1,$$

$$\sin\varphi_2=y/r_1,\ \cos\varphi_2=-(x+\mu-1)/r_2,$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего первому из (7), могут быть записаны как [4]

$$\lambda_{1,2}=\pm i\omega_1,\quad \lambda_{2,3}=\pm i\omega_2,\quad \text{где}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(4-a_{xx}-a_{yy}\right)-\sqrt{\left(4-a_{xx}-a_{yy}\right)^2-4\left(a_{xx}-a_{yy}-a_{xy}^2\right)}},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(4-a_{xx}-a_{yy}\right)-\sqrt{\left(4-a_{xx}-a_{yy}\right)^2-4\left(a_{xx}a_{yy}-a_{xy}^2\right)}},$$

С учетом (7) и (9) нетрудно установить, что определители системы (4) относительно коэффициентов равны

$$\Delta_1(\lambda_1)=0,\Delta_1(\lambda_2)=0,\ \Delta_2(\lambda_1)\neq 0,\ \Delta_2(\lambda_2)\neq 0 \quad (10)$$

Теперь легко установить, что система первых четырех уравнений системы (4) имеет решения, в которых все искомые величины не равны одновременно нулю, а два её последних уравнения имеют только тривиальное решение. Поэтому функция $\zeta^{(1)}$ равна нулю тождественно, а так как всякая функция $Z^{(k)}$ имеет множители ζ, то любая $\zeta^{(k)}$ равна тождественно нулю, т.е.

$$\zeta \equiv 0, \quad (11)$$

и, следовательно рассматриваемое периодическое решение – плоское.

Таким образом, коэффициенты a'' и b'' равны нулю. Чтобы найти $\zeta^{(1)}$ и $\eta^{(1)}$ нужно определить постоянные a, b, a´, b´ из системы уравнений (4).

Элементарный анализ этих уравнений позволяет получить, что

$$a_1^{'} = -\frac{a_{xy}}{\omega_1^2+a_{yy}} \qquad b_1^{'} = -\frac{2\omega}{\omega_1^2+a_{yy}}$$

$$a_2^{'} = -\frac{a_{xy}}{\omega_2^2+a_{xx}} \qquad b_2^{'} = -\frac{2\omega}{\omega_2^2+a_{xx}} \quad (12)$$

Первые два периодических решения системы определяются формулами

$$\begin{cases}\xi_1 = \cos\tau + c^2\xi_1^{(2)} + c^3\xi_1^{(3)} + ...\\ \eta_1 = c\left(a_2^{'}\cos\tau + b_2^{'}\sin\tau\right) + c^2\eta_1^{(2)} + c^3\eta_1^{(3)} + ...\\ \zeta_1 = 0.\end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases}\xi_2 = c\left(a_2\cos\tau + b_2\sin\tau\right) + c^2\xi_2^{(2)} + c^3\xi_2^{(3)} + ...\\ \eta_2 = c\cos\tau + c^2\eta_2^{(2)} + c^3\eta_2^{(3)} + ...\\ \zeta_2 = 0.\end{cases} \quad (14)$$

Ограничиваясь только членами первого порядка относительно c в уравнениях (13) и (14), получим

$$\cos\tau = \frac{\xi_1}{c},\ \cos\tau = \frac{\eta_2}{c},$$

$$\sin\tau = \frac{\eta_1 - a_1^{'}\xi_1}{cb_1^{'}}, \qquad \sin\tau = \frac{\xi_2 - a_2^{'}\eta_2}{cb_2^{'}},$$

где

$$a_2 = -a_{xy}/\left(\omega_2^2+a_{xx}\right),\ b_2 = 2\omega_2\left(\omega_2^2+a_{xx}\right),$$

$$a_1^{'} = -a_{xy}\left(\omega_1^2+a_{yy}\right),\ a_1^{'} = -2\omega_1\left(\omega_1^2+a_{yy}\right).$$

а c – произвольный параметр, в качестве которого может быть принято начальное отклонение, например, величины ξ.

Уравнения орбит, соответствующих каждому из решений (10) и (11), приближенно могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{\xi_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{a_1^{'}\xi_1-\eta_1}{cb_2^{'}}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\xi_2 - a_2\eta_2}{cb_2^{'}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{c}\right)^2 = 1 \quad (15)$$

Как видим, каждое из уравнений (15) представляет уравнение эллипса с центром, расположенным в области семейства устойчивых треугольных точек либрации. Следовательно, найденным периодическим решениям соответствует трехпараметрическое семейство замкнутых эллиптических орбит, окружающих треугольные точки и расположенные в плоскости орбитального движения, которые сохраняют свои формы во вращающейся вместе с основными телами системе координат, а их размеры зависят от интенсивности излучения основных тел и парусности частицы. Функции $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ будут периодическими функциями времени с периодами

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}\left[1 + h_1^{(1)}c^2 + ...\right],$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}\left[1 + h_2^{(2)}c^2 + ...\right],$$

Рассматриваемая задача является наиболее важной с точки зрения приложений в звездной динамике: на её основе можно эффективно строить промежуточные орбиты космических газопылевых облаков в поле двойных звездных систем. Результаты исследования также могут быть использованы и при изучении движения космических аппаратов в системе «Солнце-Планета».

Список литературы

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика // Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1964. – С. 560
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – С. 312
3. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации. ФЗТТ // Письма в астрономический журнал. – 1983. – Т.9, №7. – С. 432-435.
4. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. On the libration points in the photo-gravitational three-body problem // Celest. Mesh. – 1985. – V.35. – P.105-112.
5. Тхай В.Н. Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратных механических систем // ПММ. – 1996. – Т.60. – Вып.6. – С.979-991.
6. Тхай В.Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. – 2000. – Т.64, №1. – С.46-58.
7. Ефимов И.Л., Тхай В.Н. Устойчивость периодических орбит в задаче Хилла. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 1999. – С.45-60.
8. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. Устойчивость треугольных точек либрации. ФЗТТ // Письма в Астрономический журнал. – 1985. – Т. 2, № 2. – С.145-148.