УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЛАСТЯХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Мусаев В.К.

МЭСИ, Москва, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

В работе приводится информация **о** математическом моделировании нестационарных упругих волн напряжений **в** деформируемых объектах сложной формы. Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости **с** начальными **и** граничными условиями используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены **с** помощью принципа возможных перемещений. Таким образом, **с** помощью метода конечных элементов **в** перемещениях, линейную задачу **с** начальными **и** граничными условиями привели **к** линейной задаче Коши. На основе метода конечных элементов **в** перемещениях разработаны алгоритм **и** комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения.

Ключевые слова: моделирование, нестационарные волны, численный метод, перемещение, скорость перемещений, ускорение, напряжение, теория упругости, краевая задача, задача с начальными условиями, конечные элементы, треугольный конечный элемент, прямоугольный конечный элемент, контурный конечный элемент, методика, алгоритм, комплекс программ

MODELING OF NON-STATIONARY ELASTIC WAVES STRESSES IN DEFORMED REGIONS USING THE FINITE ELEMENT METHOD IN MOVEMENTS

Musayev V.K.

MESI, Moscow, e-mail: musayev-vk@yandex.ru

The work also contains information on the mathematical modeling of non-stationary elastic stress waves in deformable objects with complex shapes. For the solution of two-dimensional non-stationary dynamical problems of the mathematical theory of elasticity with initial and boundary conditions using the finite element method in the movements. The problem is solved by the method of end-to-end account, without allocation of breaks. The basic correlations of the finite element method is obtained using the principle of possible displacements. Thus, using the finite element method in displacements, a linear problem with initial and boundary conditions has led to the linear Cauchy problem. Based on the finite element method in the movements of the developed algorithm and software package for solving linear flat two-dimensional problems, which allow to solve complex problems under non-stationary dynamic effects on structures.

Keywords: modeling, transient waves, numerical method, displacement, velocity, displacement, acceleration, strain, elasticity theory, boundary value problem, with initial conditions, finite elements, triangular finite element, rectangular finite element, the contour of the finite element method, algorithm, complex programs

Импульсное воздействие характеризуется внезапностью приложения и кратковременностью действия, измеряемого микросекундами. Интенсивность их достаточно велика, для того чтобы произвести разрушение и большие необратимые изменения в теле, на которые они действуют.

В деформируемом теле при импульсном воздействии возникают возмущения различной природы. Они распространятся с конечными скоростями. Величина возмущений зависит от состояния тела и характера деформаций, в виде волн возмущений, называемых волнами напряжений. Возмущения, распространяясь в теле, образуют области, которые расширяются с течением времени и ограничены частью поверхности тела и поверхностью фронта волны напряжений.

Каждой области возмущений соответствует свое напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тензором напряжений и тензором деформаций. Области возмущений можно разделить на первичные и вторичные. Первичной является область возмущений волны нагрузки. Области возмущений волн разгрузки и отраженных будут вторичными. Они всегда находятся внутри области возмущений волны нагрузки и являются областями с начальными напряжениями и деформациями.

Волны напряжений различной природы, распространяясь, в деформируемом теле взаимодействуют, друг с другом, что приводит к образованию новых областей возмущений, перераспределению напряжений и деформаций.

Напряженное состояние волнового нагруженного тела может изменяться так быстро, что возникающие деформации и разрушения еще не успевают распространиться, как распределение напряжений изменится, так как скорости распространения волн напряжений достигают 6000 $м/с$, а нарушение прочности распространяются со скоростью не более 1500 $м/с$.

При интерференции волн напряжений их интенсивности складываются. Они могут достигать значений, превосходящих предел прочности материала. В этом случае наступает разрушение материала.

После трехкратного или четырехкратного прохождения и отражения волн напряжений в теле процесс распространения возмущений становится установившимся, напряжения и деформации усредняются, тело находится в колебательном движении.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики, алгоритма и результаты решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в следующих работах [1–10].

Постановка задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим некоторое тело Г (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат OXY, которому в начальный момент времени $t=0$ сообщается механическое воздействие.

Точные уравнения двумерной (плоское напряженное состояние) динамической теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial X}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial X}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$(x,y)\in\Gamma,$$

$$\sigma_x=\rho C_p^2\varepsilon_x+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_y,$$
$$\sigma_y=\rho C_p^2\varepsilon_y+\rho(C_p^2-2C_s^2)\varepsilon_x,$$

$$\tau_{xy}=\rho C_s^2\gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial X},\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial Y},$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial v}{\partial X},\ (x,y)\in(\Gamma\in S),\qquad(1)$$

где σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора упругих напряжений; ε_x, ε_y и γ_{xy} – компоненты тензора упругих деформаций; u и v – составляющие вектора упругих перемещений вдоль осей OX и OY соответственно; ρ – плотность материала; $C_p=\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость продольной упругой волны; $C_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ – скорость поперечной упругой волны; ν – коэффициент Пуассона; Е – модуль упругости; $S\ (S_1\cup S_2)$ – граничный контур тела Γ.

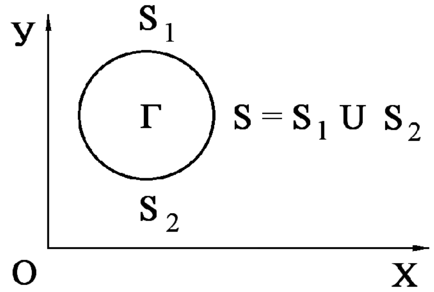

Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат OXY

Систему (1) в области, занимаемой телом Γ, следует интегрировать при начальных и граничных условиях.

Начальные условия в области Γ зададим в виде

$$u\big|_{t=0}=u_0,\ v\big|_{t=0}=v_0,\ \dot u\big|_{t=0}=\dot u_0,$$
$$\dot v\big|_{t=0}=\dot v_0,\ (x,y)\in\Gamma,\qquad(2)$$

где u_0, v_0, $\dot u_0$ и $\dot v_0$ – заданные в области Γ функции.

Граничные условия зададим в виде:

составляющих компонентов тензора упругих напряжений на границе S_1

$$\sigma_x l+\tau_{xy}m=A_x,\ \tau_{xy}l+\sigma_y m=A_y,$$
$$(x,y)\in S_1;\qquad(3)$$

составляющих компонентов вектора упругих перемещений на границе S_2

$$u=B_x,\ v=B_y,\ (x,y)\in S_2,\qquad(4)$$

где l и m – направляющие косинусы; A_x, A_y, B_x и B_y – заданные на границе S функции.

Разработка методики и алгоритма

Для решения двумерной нестационарной динамической задачи математической теории упругости с начальными и граничными условиями (1–4) используем метод конечных элементов в перемещениях [1, 4, 6].

Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела <<mus58.wmf>>, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{\mathrm{H}}\ddot{\vec{\Phi}} + \overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi} = \vec{R},\ \vec{\Phi}\Big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0,$$

$$\dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0, \qquad (5)$$

где $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (5) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями (1–4) привели к линейной задаче Коши (5).

Для интегрирования уравнения (5) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{\mathrm{H}}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi} = \vec{R},\ \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}. \qquad (6)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (6) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t\overline{\mathrm{H}}^{-1}(-\overline{\mathrm{K}}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i),$$

$$\vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}. \qquad (7)$$

где Δt – шаг по временной координате.

Определим упругое контурное напряжение на границе области, свободной от нагрузок.

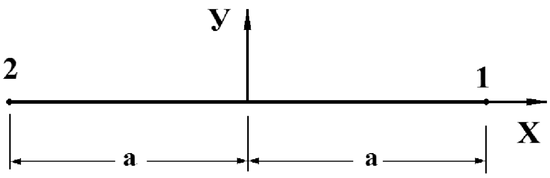

Рис. 2. Контурный конечный элемент с двумя узловыми точками

С помощью вырождения прямоугольного конечного элемента с четырьмя узловыми точками получим контурный конечный элемент с двумя узловыми точками (рис. 2).

При повороте оси x на угол α против часовой стрелки, получим упругое контурное напряжение σ_k в центре тяжести контурного конечного элемента с двумя узловыми точками

$$\sigma_k = (E/(2a(1-\nu^2)))((u_1 - u_2)\cos\alpha + (v_1 - v_2)\sin\alpha). \qquad (8)$$

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках

$$\Delta t = k\frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ ...), \qquad (9)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Для исследуемой области, состоящей из материалов с разными физическими свойствами, выбирается минимальный шаг по временной координате.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на уникальные сооружения [1, 5–10].

При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90.

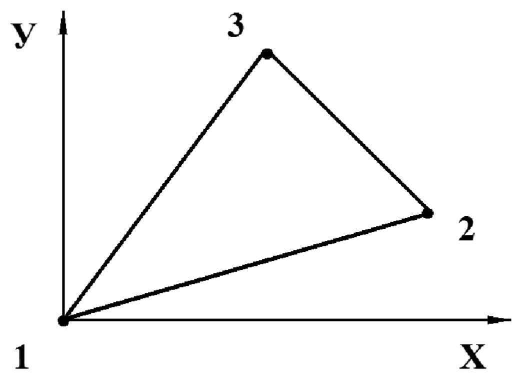

Рис. 3. Треугольный конечный элемент с тремя узловыми точками

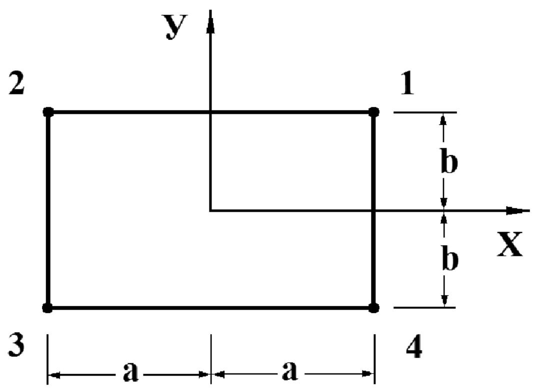

Рис. 4. Прямоугольный конечный элемент с четырьмя узловыми точками

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений (рис. 3) и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений (рис. 4). По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений.

Выводы

Для моделирования волн напряжений в деформируемых областях сложной формы применяется численное моделирование. На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны методика, алгоритм и комплекс программ для решения линейных двумерных плоских задач, которые позволяют решать сложные задачи при ударных воздействиях на сооружения. Основные соотношения метода конечных элементов получены с помощью принципа возможных перемещений. Матрица упругости выражена через скорость продольных волн, скорость поперечных волн и плотность.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками с билинейной аппроксимацией упругих перемещений. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками с линейной аппроксимацией упругих перемещений. За основные неизвестные приняты два перемещения и две скорости перемещений в узле конечного элемента.

Задачи решаются с методом сквозного счета, без выделения разрывов. Применяется кусочно-линейная аппроксимация для уменьшения влияния разрывных на точность результатов численного решения, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях.

Линейная динамическая задача с начальными и граничными условиями в виде дифференциальных уравнений в частных производных, для решения задач о нестационарных воздействиях на деформируемые объекты сложной формы, с помощью метода конечных элементов в перемещениях приведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается по явной двухслойной схеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусаев В.К. Численное решение волновых задач теории упругости и пластичности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. – 1997. – № 1. – С. 87–110.

2. Мусаев В.К. О разрушениях в сложных деформируемых телах вызванных импульсными воздействиями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 36–42.

3. Мусаев В.К. О некоторых возможностях математического моделирования и численного компьютерного эксперимента // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2006. – № 1. – С. 81–86.

4. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 62–76.

5. Мусаев В.К. Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

6. Мусаев В.К. Численное моделирование упругих сейсмических волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 4. – С. 6–22.

7. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

8. Мусаев В.К. Математическое моделирование интерференции нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4; URL: www.science-education.ru/118-14118 (дата обращения: 21.09.2014).

9. Мусаев В.К. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки / В.К. Мусаев, С.В. Ситник, А.А. Тарасенко, В.Г. Ситник, М.В. Зюбина // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (часть 7). – С. 1466–1470; URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10004353 (дата обращения: 21.09.2014).

10. Мусаев В.К. О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11 – С. 10–14.