

УДК 681.3

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДУЛЯРНЫХ НЕПОЗИЦИОННЫХ КОДОВ

Гапочкин А.В., Клименко В.Д., Калмыков М.И.

ФГАОУ ВПО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь,

e-mail: kia762@yandex.ru

Модулярные коды нашли широкое применение во многих сферах современных информационных технологиях. Использование этих непозиционных кодов позволяет обеспечить высокую скорость обработки данных. Поэтому данные алгебраические системы целесообразно использовать в алгоритмах цифровой обработки сигналов, которые характеризуются обработкой большого объема данных в реальном масштабе времени. Кроме того, модулярные коды позволяют осуществлять крупномасштабную обработку сигналов с использованием вейвлет-преобразования. В работе рассмотрены примеры применения вейвлет преобразования Добеши.

Ключевые слова: модулярные коды, крупномасштабная обработка сигналов, вейвлеты, преобразование Добеши, базисные функции Добеши

DIGITAL SIGNAL PROCESSING USING MODULAR NON-POSITIONAL CODES

Gapochkin A.V., Klimenko V.D., Kalmykov M.I.

North-Caucasian Federal University, Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru

Modular codes are widely used in many areas of modern information technologies. The use of these non-positional codes can provide a high speed data processing. Therefore, these algebraic systems should be used in the algorithms of digital processing of signals, which are characterized by processing large amounts of data in real-time. In addition, modular codes make it possible to implement a large-scale signal processing using wavelet transform. The paper discusses examples of the application of the wavelet transform Daubechies.

Keywords: modular codes, large-scale signal processing, wavelet transform Daubechies, the basic functions of Daubechies

Математический аппарата дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и быстрого преобразования Фурье (БПФ) нашли широкое применение в алгоритмах цифровой обработки сигналов (ЦОС). При этом цифровая обработка сигналов характеризуется обработкой большого объема данных в реальном масштабе времени. Обеспечить выполнение данного условия возможно за счет использования непозиционных модулярных кодов.

Одним из основных критериев цифровой обработки сигналов является необходимость выполнения ортогональных преобразований в реальном масштабе времени. Для решения данной проблемы предлагается использовать непозиционные модулярные коды. Так в работах [1-3] для проведения ортогональных преобразований сигналов предлагается использовать систему остаточных классов (СОК). В данной непозиционной системе счисления в качестве оснований используются взаимнопростые числа p_1, p_2, \dots, p_n , у которых

$$\text{НОД}(p_i, p_j) = 1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; j \neq i.$$

Тогда любое число, которое не превосходит рабочий диапазон СОК, можно представить в виде набора остатков, полученных при делении этого числа на числа основания

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (1)$$

где $\alpha_i \equiv A \pmod{p_i}; i = 1, \dots, n$.

В качестве основного достоинства системы остаточных классов можно отметить высокую скорость выполнения модульных операций [1]. Этими операциями являются операции сложение, вычитание и умножение.

Пусть дана пара чисел A и B , которая представлена в модулярном непозиционном коде $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Тогда операции сложения, вычитания и умножения по модулю можно представить соответствующими операциями над остатками

$$A + B = ((\alpha_1 + \beta_1) \pmod{p_1}, (\alpha_2 + \beta_2) \pmod{p_2}, \dots, (\alpha_n + \beta_n) \pmod{p_n}). \quad (2)$$

$$A - B = ((\alpha_1 - \beta_1) \pmod{p_1}, (\alpha_2 - \beta_2) \pmod{p_2}, \dots, (\alpha_n - \beta_n) \pmod{p_n}). \quad (3)$$

$$A \cdot B = ((\alpha_1 \cdot \beta_1) \bmod p_1, (\alpha_2 \cdot \beta_2) \bmod p_2, \dots, (\alpha_n \cdot \beta_n) \bmod p_n). \quad (4)$$

Тогда, используя систему остаточных классов, можно реализовать ортогональные преобразования сигналов в виде n парал-

лельно выполняемых вычислений дискретного преобразования Фурье по основаниям СОК

$$\begin{cases} X(k) \bmod p_1 = \left| \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \Big|_{p_1}^+ \cdot W^{lk} \Big|_{p_1}^+ \right|_{p_1}^+ \\ \vdots \\ X(k) \bmod p_n = \left| \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \Big|_{p_n}^+ \cdot W^{lk} \Big|_{p_n}^+ \right|_{p_n}^+ \end{cases} \quad (5)$$

где W^{lk} – поворачивающий коэффициент; $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$; $N = 2^v$.

са вычетов эффективно поддерживает также реализацию БПФ. Так при использовании параллельно-конвейерного алгоритма БПФ выражение (5) принимает вид

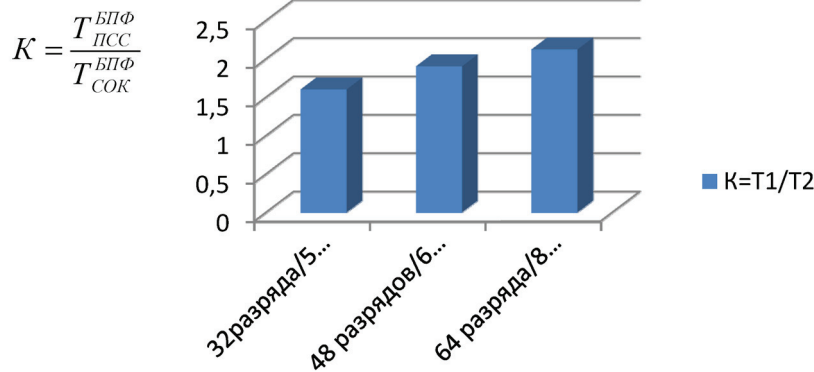
Следует отметить, что математический аппарат непозиционного кодирования клас-

$$X(k) \bmod p_i = \left| \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{v-1,0}(n) W_N^{2nk} \right|_{p_i}^+ + \left| \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{v-1,1}(n) W_N^{2(n+1)k} \right|_{p_i}^+ \quad (6)$$

где $x_{v-1,0}(n) = x(2nT)$, $x_{v-1,1}(n) = x((2n+1)T)$ – соответственно последовательность с четными и нечетными номерами; $W_N^2 = e^{-\frac{2\pi}{N/2}}$.

При этом, несмотря на необходимость проведения прямого преобразования из позиционного кода в модулярный код и ему обратного преобразования, спецпроцессор БПФ класса вычетов позволяет в производительность. Сравнительный анализ време-

ни выполнения БПФ в позиционной системе счисления ($T_1 = T_{ПСС}^{БПФ}$) и с использованием параллельных вычислений ($T_2 = T_{СОК}^{БПФ}$) показан на рисунке. Для оценки был выбран относительный коэффициент $K = T_{ПСС}^{БПФ} / T_{СОК}^{БПФ}$.



Сравнительный анализ времени выполнения БПФ в ПСС (T_1) и в СОК (T_2)

Анализ данного рисунка показывает, что применение СОК позволяет повысить скорость цифровой обработки сигналов с использованием алгоритма БПФ более

чем в 1,5 раза при обработке уже 32 разрядных данных. Причем при увеличении разрядности обрабатываемых данных выигрыш возрастает. Так при обработке 64 раз-

рядных данных скорость непозиционного процессора более чем в 2 раза превосходит скорость работы позиционного СП ЦОС, даже с учетом необходимости выполнения операций прямого и обратного преобразований кодов.

Наряду с системой остаточных классов в ряде работ предлагается использовать для проведения ортогональных преобразований

$$\text{НОД}(p_i(z), p_j(z)) = 1; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; j \neq i.$$

Использование полиномиальной системы классов вычетов (ПСКВ) позволяет осуществлять ортогональные преобразования

$$(X_1(l), \dots, X_n(l)) = \left(\sum_{j=0}^{d-1} x_1(j) \beta_1^{jl}, \dots, \sum_{j=0}^{d-1} x_n(j) \beta_n^{jl} \right), \quad (7)$$

$$(x_1(j), \dots, x_n(j)) = \left(d^* \sum_{l=0}^{d-1} X_1(l) \beta_1^{-jl}, \dots, d^* \sum_{l=0}^{d-1} X_n(l) \beta_n^{-jl} \right), \quad (8)$$

где $d^* d = p^v - 1$.

При этом справедливо

$$\begin{aligned} x_i(j) &\equiv x(j) \bmod p_i(z); \beta_i^{\pm jl} \equiv \beta^{\pm jl} \bmod p_i(z); \\ X_i(l) &\equiv X(l) \bmod p_i(z) \end{aligned} \quad (9)$$

Если приравнять соответствующие координаты, получаем n пар прямого преобразования

$$\begin{cases} X_1(l) = \sum_{j=0}^{d-1} x_1(j) \beta_1^{jl} \bmod p_1(z) \\ \vdots \\ X_n(l) = \sum_{j=0}^{d-1} x_n(j) \beta_n^{jl} \bmod p_n(z), \end{cases} \quad (10)$$

и n пар обратного преобразования

$$\begin{cases} x_1(j) = d^* \sum_{l=0}^{d-1} X_1(l) \beta_1^{-jl} \bmod p_1(z) \\ \vdots \\ x_n(j) = d^* \sum_{l=0}^{d-1} X_n(l) \beta_n^{-jl} \bmod p_n(z). \end{cases} \quad (11)$$

Применение выражений (10) и (11) позволяет свести вычисление ортогональных преобразований сигналов над кольцом $P(z)$ к n независимым вычислениям, проводимым по модулям $p_i(z)$ кода ПСКВ. При этом обеспечить повышение скорости цифровой обработки сигналов в кодах ПСКВ возмож-

сигналов – кольцо полиномов. В этом случае осуществляется переход от одномерной обработки сигнала к многомерной. Использование данного математического аппарата в задачах ЦОС достаточно наглядно приведено в работах [4-8]. В отличие от СОК данный непозиционный модулярный код образуется с помощью неприводимых полиномов $p_1(z), p_2(z), \dots, p_n(z)$, у которых

на основе целочисленной арифметике, обладающей минимальными погрешностями точности вычислений

но за счет использования параллельно-конвейерных вычислений и быстрых алгоритмов с матрицами меньшей размерности [5-6]. Однако ДПФ и БПФ в своем традиционном виде не способны осуществлять анализ нестационарных сигналов. Следовательно, для спектрального анализа реальных сигналов необходимо использовать вейвлет-преобразования.

В настоящее время вейвлет-преобразования нашли широкое применение благодаря тому, что преобразование Фурье и его быстрые алгоритмы неэффективно обеспечивают анализ нестационарных сигналов, которые локализованы в некотором интервале времени. Это связано с тем, что при ортогональных преобразованиях ДПФ и БПФ теряется информация о сигнале во временной области. Следовательно, для получения истинной картины при анализе сигнала необходимо производить эту процедуру как во временной области, так и в частотной области. Это позволит наиболее правильно оценить изменения частотно-временных характеристик сигнала.

Известно, что частотно-временной анализ предназначен для выявления локальных частотно-временных возмущений сигнала.

При этом различают два вида вейвлет-преобразований:

- непрерывное вейвлет-преобразование;
- дискретное вейвлет-преобразование.

Представление функции $f(t)$ через ее непрерывное вейвлет преобразование является избыточным. Это связано с тем, что обрабатываемые сигналы имеют ограниченную полосу и энергию. Кроме того, при преобразовании аналогового сигнала к цифровой форме допускает определенный вид погрешности квантования. Поэтому на практике наибольшее применение нашли дискретные вейвлет-преобразования.

В настоящее время существует целый ряд вейвлетов, которые используются при крупномасштабном анализе сигналов. Наи-

большее применение нашли вейвлеты Добеши [9, 10]. Семейство вейвлетов Добеши состоит из ортонормальных функций с компактным носителем, в котором каждая следующая функция имеет большую гладкость, чем предыдущая.

Пусть входная последовательность задается восьмью отсчетами $x(nT) = \{1, 1, 4, 4, 0, 0, 1, 1\}$. Рассмотрим реализацию крупномасштабного преобразования сигнала с использованием вейвлетов Db4. Из определения коэффициентов следует, что данное преобразование использует четыре коэффициента фильтра. Значения коэффициентов приведены в работах [9, 10]. Эти значения будут определяться следующими значениями

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Тогда матрица преобразования Добеши будет иметь следующий вид

$$W = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

В работах [9, 10] показано, что матрица W является ортогональной, если четыре порождающие ее коэффициента удовлетворяют соотношениям

$$h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 0. \quad (13)$$

$$h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0. \quad (14)$$

Кроме того для построения вейвлет-преобразования необходимо выполнение еще двух условий

$$h_3 - h_2 + h_1 - h_0 = 0. \quad (15)$$

$$0 \cdot h_3 - 1 \cdot h_2 + 2 \cdot h_1 - 3 \cdot h_0 = 0. \quad (16)$$

Эти два уравнения для вычисления коэффициентов фильтра предопределяются условием равенства нулю первых двух моментов последовательности.

При использовании этой матрицы к исходной входной последовательности получаем следующий результат

$$X_0 = x_0 h_0 + x_1 h_1 + x_2 h_2 + x_3 h_3 = 1 \cdot 0,48 + 1 \cdot 0,84 + 4 \cdot 0,22 + 4 \cdot (-0,13) = 1,68;$$

$$X_1 = x_0 h_3 - x_1 h_2 + x_2 h_1 - x_3 h_0 = 1 \cdot (-0,13) - 1 \cdot 0,22 + 4 \cdot 0,84 + 4 \cdot (-0,48) = 1,09;$$

$$X_2 = x_2 h_0 + x_3 h_1 + x_4 h_2 + x_5 h_3 = 4 \cdot 0,48 + 4 \cdot 0,84 + 0 \cdot 0,22 + 0 \cdot (-0,13) = 5,28;$$

$$X_3 = x_2 h_3 - x_3 h_2 + x_4 h_1 - x_5 h_0 = 4 \cdot (-0,13) - 4 \cdot 0,22 + 0 \cdot 0,84 + 0 \cdot (-0,48) = -1,4;$$

$$X_4 = x_4h_0 + x_5h_1 + x_6h_2 + x_7h_3 = 0 \cdot 0,48 + 0 \cdot 0,84 + 1 \cdot 0,22 + 1 \cdot (-0,13) = 0,09 ;$$

$$X_5 = x_4h_3 - x_5h_2 + x_6h_1 - x_7h_0 = 0 \cdot (-0,13) - 0 \cdot 0,22 + 1 \cdot 0,84 + 1 \cdot (-0,48) = 0,36 ;$$

$$X_6 = x_6h_0 + x_7h_1 + x_0h_2 + x_1h_3 = 1 \cdot 0,48 + 1 \cdot 0,84 + 1 \cdot 0,22 + 1 \cdot (-0,13) = 1,41 ;$$

$$X_7 = x_6h_3 - x_7h_2 + x_0h_1 - x_1h_0 = 1 \cdot (-0,13) - 1 \cdot 0,22 + 1 \cdot 0,84 + 1 \cdot (-0,48) = 0,01 .$$

Таким образом, в ходе проведения крупномасштабного вейвлет преобразования Db4 получен образ сигнала, состоящий из 4 гладких коэффициентов, которые соответствуют четным спектральным составляющим $\{X_0, X_2, X_4, X_6\}$, которые вместе образуют основу сглаживающего фильтра H .

Очевидно, что вторая строка, представленной выше матрицы W , порождает величину $d_1 = x_0h_3 - x_1h_2 + x_2h_1 - x_3h_0$, которая является детальным коэффициентом вейвлет-преобразования. При этом все остальные четные строки порождающей матрицы будут определяться аналогичными свертками. В результате все детальные коэффициенты составят фильтры высокой частоты G . Такой фильтр G не относится к сглаживающим фильтрам. При этом его коэффициенты подобраны так, чтобы фильтр G выдавал на выход маленькие числа, когда входные данные коррелированы. Взятые вместе полученные фильтры H и G имеют зеркаль-

ную структуру, поэтому они называются квадратурными зеркальными фильтрами (QMF, quadrature mirror filters) [10].

Таким образом, очевидно, что вейвлет-преобразование любого сигнала можно представить в виде прохождения исходного образа через фильтр QMF, который состоит из низкочастотного фильтра (H) и высокочастотного фильтра (G).

Следовательно, если размер матрицы представляет собой $n \times n$ используя такую матрицу можно получить $\frac{n}{2}$ гладких коэффициентов. При этом эта матрица также порождает $\frac{n}{2}$ детальных коэффициентов.

Рассмотрим процедуру восстановления сигнала, используя обратное вейвлет преобразование. Для осуществления данной операции необходимо использовать транспонированную матрицу (12). Тогда матрица обратного преобразования Добеши будет иметь следующий вид

$$W^T = \begin{bmatrix} h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & -h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & -h_0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & -h_0 & h_1 & -h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & -h_0 & h_1 & -h_2 & 0 & 0 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\ h_1 & -h_0 & 0 & 0 & h_3 & -h_0 & h_1 & -h_2 \end{bmatrix} . \quad (12)$$

При использовании этой матрицы к вычисленной спектральной входной последовательности получаем следующий результат

$$x_0 = X_0h_0 + X_1h_1 + X_6h_2 + X_7h_3 = 1,68 \cdot 0,484 - 0,13 \cdot 1,09 + 1,42 \cdot 0,22 + 0,01 \cdot 0,84 = 0,9833 ;$$

$$x_1 = X_0h_1 - X_1h_2 + X_6h_3 - X_3h_0 = 1,68 \cdot 0,84 - 1,09 \cdot 0,22 - 1,41 \cdot 0,13 + 0,01 \cdot (-0,48) = 0,984 ;$$

$$x_2 = X_0h_2 + X_1h_1 + X_2h_0 + X_3h_3 = 1,68 \cdot 0,22 + 1,09 \cdot 0,84 + 5,28 \cdot 0,48 + 1,4 \cdot 0,13 = 4,001 ;$$

$$x_3 = X_0h_3 - X_1h_0 + X_2h_1 - X_3h_2 = -1,68 \cdot 0,13 - 1,09 \cdot 0,48 + 5,28 \cdot 0,84 + 1,4 \cdot 0,22 = 4,001 ;$$

$$x_4 = X_2h_2 + X_3h_1 + X_4h_0 + X_5h_3 = 5,28 \cdot 0,22 - 1,4 \cdot 0,84 + 0,09 \cdot 0,48 - 0,36 \cdot 0,13 = 0,018 ;$$

$$x_5 = X_2 h_3 - X_3 h_0 + X_4 h_1 - X_5 h_2 = -5,28 \cdot 0,13 + 1,4 \cdot 0,48 + 0,09 \cdot 0,84 - 0,36 \cdot 0,22 = -0,018;$$

$$x_6 = X_4 h_2 + X_5 h_1 + X_6 h_0 + X_7 h_3 = 0,09 \cdot 0,22 + 0,36 \cdot 0,84 + 1,41 \cdot 0,48 - 0,13 \cdot 0,01 = 0,989;$$

$$x_7 = X_4 h_3 - X_5 h_0 + X_6 h_1 - X_7 h_2 = -0,09 \cdot 0,13 - 0,36 \cdot 0,48 + 1,41 \cdot 0,84 - 0,22 \cdot 0,01 = 0,997;$$

Вычисленные данные свидетельствуют, что использование вейвлет-преобразований представляет собой обратимые преобразования. При этом из-за ошибок округления, которые определяются позиционной системой счисления, конечный результат обратного вейвлет-преобразования несколько отличается от исходного. Одним из путей решения данной проблемы может быть связано с использованием непозиционных модулярных кодов. Реализуемая ими целочисленная обработка позволит сократить ошибки округления. Применение системы остаточных классов для реализации вейвлет-преобразования Добеши показано в работах [9, 10].

Выводы

В работе рассмотрены вопросы применения модулярных кодов для реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов. Проведенные исследования показали, что использование непозиционных модулярных кодов возможно не только при выполнении ортогональных преобразований в поле комплексных чисел, но и при вейвлет-преобразованиях сигнала. В качестве такого преобразования предлагается использовать преобразования Добеши. Приведены примеры прямого преобразования Добеши, а также реализация обратного преобразования Добеши. Показана возможность использования системы остаточных классов для реализации вейвлет-преобразования. Применение малоразрядных остатков позволит повысить скорость выполнения данного преобразования сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Червяков Н.И., Сахнюк П.А., Шапошников А.В., Ряднов С.А. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейросетевых систем/ Под ред. Н.И. Червякова. – М.: Физматлит, 2003. – 303 с.
2. Червяков Н.И. Обобщенная вычислительная модель модулярного нейропроцессора цифровой обработки сигналов на основе программируемых логических интегральных схем // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2006. № 10. С. 37-40.
3. Червяков Н.И., Ляхов П.А. Реализация КИХ-фильтров в системе остаточных классов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2012. № 5. С. 16-25.
4. Калмыков И.А., Саркисов А.Б., Яковлева Е.М., Калмыков М.И. Модулярный систолический процессор цифровой обработки сигналов с реконфигурируемой структурой // Вестник Северо-Кавказского федерального университета. – 2013. – № 2 (35). – С. 30-35.
5. Калмыков И.А., Саркисов А.Б., Макарова А.В. Технология цифровой обработки сигналов с использованием модулярного полиномиального кода // Известия ЮФУ Технические науки. – 2013. – №. 12 (149). – С. 234-241.
6. Калмыков И.А., Воронкин Р.А., Резеньков Д.Н., Емарлукова Я.В., Фалько А.А. Генетические алгоритмы в системах цифровой обработки сигналов// Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2011. – № 5. – С. 20-27.
7. Калмыков И.А., Зиновьев А.В., Емарлукова Я.В. Высокоскоростные систолические отказоустойчивые процессоры цифровой обработки сигналов для инфотелекоммуникационных систем // Инфокоммуникационные технологии. Самара. – 2009. – Т.7. №2. – С. 31-47
8. Калмыков И.А., Калмыков М.И. Структурная организация параллельного спецпроцессора цифровой обработки сигналов, использующего модулярные коды// Теория и техника радиосвязи. – 2014. – № 2. – С. 60-66.
9. Червяков Н.И., Чумаков Д.В., Мальцев Н.А. Применение нейронных сетей для реализации целочисленного вейвлет анализа сигналов, заданных конечным числом отсчетов-преобразований // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2008. – № 1-2. – С. 43-50.
10. Червяков Н.И., Чумаков Д.В., Лавриненко С.В. Нейросетевая реализация дискретных вейвлет-преобразований // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2008. – № 1-2. – С. 4-11.