МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Сторожева Д.С., Фокина И.А., Ощепкова Ю.С., Агишева Д.К., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: mathemat@volpi.ru

Основной принцип экономической деятельности – максимум эффективности при минимуме затрат ресурсов – предполагает широкое применение математического моделирования в обработке данных, своевременной оценке ситуации, прогнозировании деятельности организации. Математические модели представляют собой основу компьютерного моделирования и обработки информации. Они расширяют наши представления о закономерностях экономических процессов и помогают сформировать мышление и анализ на новом, более высоком уровне.

Понятие производственной функции имеет основополагающее значение в экономической теории. Производственная функция определяет связь между затратами факторов производства и выпуском продукции в производственной системе. Производственная функция описывает наиболее эффективные производственные процессы.

С помощью производственных функций можно оценить эффективность функционирования производственной системы и использования в ней ресурсов, спрогнозировать влияние вносимых изменений и инноваций в производство, выбрать оптимальную стратегию эволюции производственных систем.

Многофакторная производственная функция характеризуется функцией нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где независимые неотрицательные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ обозначают объёмы n используемых ресурсов, а значение функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – объём выпуска.

Из производственных функций в микро- и макроэкономике наиболее часто используется двухфакторная производственная функция Кобба-Дугласа. В качестве основных факторов в ней используют *капитал*, т.е. прошлый (накопленный) труд K в форме остальных производственных фондов и настоящий (живой) *труд* L, описываемый количеством занятых. Если результатом деятельности экономической системы считается объём выпуска продукции Y, то экономика представляется моделью в форме наиболее распространённой *двухфакторной производственной функции* $Y = F(K, L)$.

Обычно экономическая система производит несколько различных видов продукции, поэтому объём выпуска удобнее всего исчислять в денежном выражении, например, если в качестве экономической системы рассматривать *национальную экономику,* то объёмом выпуска можно считать как *валовой внутренний продукт, а* если в качестве экономической системы рассматривать фирму – то просто выпуск продукции в денежном выражении, т.е. суммарную стоимость производственной продукции всех видов.

Производственная функция называется *неоклассической*, если она определена при всех неотрицательных значениях аргументов K и L, является непрерывной, дважды дифференцируемой по её аргументам и обладает следующими свойствами:

- $F(0, L) = 0$ при всех $L \geq 0$, $F(K, 0) = 0$ при всех $K \geq 0$, т.е. при отсутствии хотя бы одного из факторов производство невозможно;
- $F'_K \geq 0$, $F'_L \geq 0$, при всех $K \geq 0$, $L \geq 0$, т. е. при увеличении затрат по одному из факторов выпуск продукции возрастает;
- $F''_K < 0$, $F''_L < 0$ для всех $K \geq 0$, $L \geq 0$, это значит, что при увеличении количества одного из используемых ресурсов при неизменном количестве другого скорость роста выпуска продукции замедляется;
- $F(\infty, L) = \infty$ при всех $L > 0$, $F(K, \infty) = \infty$ при всех $K > 0$, т.е. при неограниченном увеличении количества одного из ресурсов выпуск продукции неограниченно возрастает.

При моделировании макроэкономических процессов часто используется мультипликативная двухфакторная производственная функция Кобба-Дугласа вида $Y = Y_0 \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$, где K – объём используемого капитала, L – затраты труда. Выбор значений параметров Y_0, α, β определяется статистическими данными за определённый период времени. Согласно статистической обработке экономических данных, проводившейся различными авторами, наблюдаются следующие закономерности: $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta \approx 1$. Нетрудно видеть, что функция $Y = Y_0 \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$ обладает всеми перечисленными свойствами неоклассических производственных функций.

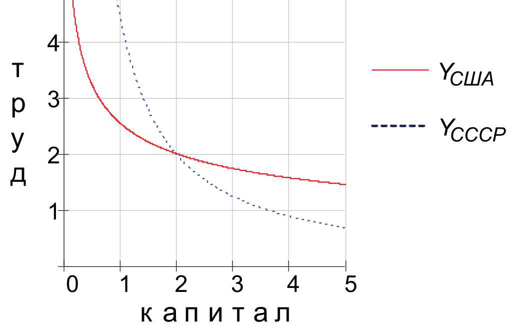
В таблице приведены значения макроэкономических параметров для стран США и СССР. Коэффициент Y_0 положим равным единице.

Страна	Годы	Параметры		Вид функции
		α	β	
США	1934-1956	0,26	0,74	$Y_{США} = K^{0,26}L^{0,74}$
СССР	1960-1985	0,54	0,46	$Y_{СССР} = K^{0,54}L^{0,46}$

Между данными, по которым построены функции, временнóй промежуток – несколько десятилетий. Полагая, что за столь длительное время на первое место выступает технический

прогресс, проанализируем участие капитала и труда в достижении одинакового объёма производства. Построим на одном графике линии уровня $K^{\alpha} \cdot L^{\beta} = 2$ функций $Y_{США}$ и $Y_{СССР}$ (рисунок).

Видно, что за десятилетия линия уровня сдвинулась направо. Это означает, что доля капитала в достижении одинакового объёма производства увеличилась, а доля живого труда уменьшилась. Значит, труд стал более производительным.



Полученная статистическими методами производственная функция позволяет рассчитывать ряд важных характеристик: среднюю и предельную производительности, эластичность по i-му фактору, предельные нормы замены одного фактора другим и т.д. Эти материалы, полученные в аналитическом, графическом и табличном видах, дают возможность экономисту-аналитику проводить исследования экономических показателей производственной деятельности экономического субъекта, начиная от мелкого предпринимателя и заканчивая государством в целом.

Список литературы

1. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.: ил.
2. Математическая статистика: учебное пособие / Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 2. – С. 122-123.
3. Линейное программирование: учебное пособие / Д.К. Агишева, С.А. Зотова, Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная // Успехи современного естествознания. – 2010. – № 9. – С. 61-62.
4. Лосева А.Ю., Агишева Д.К. Эластичность спроса // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 48-49.
5. Мягков М.М., Гафуров Т.Д., Агишева Д.К. Анализ использования ресурсов в оптимальном плане // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 51-51.
6. Гусева Д.Р., Перова Т.Н., Платонова Е.А., Агишева Д.К. Графический анализ устойчивости // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 46-47.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДИАМЕТРА МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ХОМУТА

Ткачева Е.Ю., Ребро И.В., Мустафина Д.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: lentkacheva93@mail.ru

Хомуты являются незаменимым и широко используемым изделием. Контролируемый хомут является надежным средством для плотного и герметичного соединения труб с резиновыми рукавами. Таким образом, необходимо проконтролировать, чтобы хомут обеспечивал качественное соединение.

На сегодняшний день рынок хомутов способен предложить массу типов и разновидностей этих изделий, классифицирующихся в зависимости от двух основных факторов: материала, из которого изготовлен хомут, и типа задач, которые он призван решить.

Цельные хомуты не предусматривают двигающихся частей, поэтому их диаметр можно регулировать в ограниченных пределах в зависимости от размера труб. Так хомут должен плотно сжимать трубу, то необходимо, чтобы его диаметр был незначительно больше охватываемой детали.

Контролируемая нами деталь представляет собой цельной металлический хомут, изготовляемый из Листа $\frac{2{,}0\ \text{ГОСТ}19903-74}{\text{Ст3 ГОСТ}16523-97}$. Номинальный размер диаметра = 36 мм. Отклонение по ГОСТ 30893.2 – mK верхние es = + 0,62, нижнее ei = 0.

В ходе контролируемого замера металлического хомута были получены следующие экспериментальные данные диаметра, мм: 36; 36,5; 37; 36,6; 36,9; 36,5; 35,4; 35,7; 36,6; 36,4; 36,4; 36,3; 36,7; 36; 36; 36,3; 36,7; 36,3; 36,2; 36,4.

Проверим, согласуется ли с нормальным распределением статистическое распределение эмпирических данных, используя критерий Колмогорова. Результаты вычисления приведем в таблице.

Анализируя значения, получаем, что данное статистическое распределения является нормальным. Используем критерий Колмогорова: так как

$$D = \max\left|F^*(x) - F(x)\right| = 0{,}067$$

и при $n = 20$ $\lambda = 0{,}067\sqrt{20} \approx 0{,}299$, то $P(0{,}29) = 1$ и $P(0{,}3) \approx 1$.

K	Интервал	n_x	$\overline{x_i}$	ω_i	$hf(x)$	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x) - F(x)$
1	(35,2;35,5]	1	35,35	0,05	0,013	0,05	0,013	0,037
2	(35,5;35,8]	1	35,65	0,05	0,074	0,1	0,087	0,013
3	(35,8;36,1]	3	35,95	0,15	0,22	0,25	0,307	-0,057
4	(36,1;36,4]	7	36,25	0,35	0,36	0,6	0,667	-0,067
5	(36,4;36,7]	6	36,55	0,3	0,25	0,9	0,917	-0,017
6	(36,7;37]	2	36,85	0,1	0,097	1	1,014	-0,014
Σ		20		1	0,98			

Используя коэффициент Стьюдента, получаем абсолютную погрешность значений измерений

$$\Delta_x = t_\alpha \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}1825$$

и относительную погрешность измерения

$$\varepsilon = \left|\frac{\Delta_x}{\overline{x}}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}1825}{36{,}3385} \cdot 100\% = 0{,}005 \cdot 100\% = 0{,}5\%$$

Систематическую погрешность измерения

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 100\% = 0{,}082 \cdot 100\% = 8{,}2\%.$$

Найдем доверительный интервал. По данным среднее значение $\overline{x} = 36{,}3385$ мм и стандартное отклонение равно $S^2 = 0{,}14971$. Так как оценка двухсторонняя квантиль для нормального распределения равен

$$\gamma = \frac{1+\alpha}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975$$

то квантиль распределения Стьюдента

$$t_\gamma(f) = t_{0{,}975}(19) = 2{,}093$$

где $f = n - 1 = 19$ – степень свободы.

Получаем границы доверительного интервала:

$$36{,}3385 - 2{,}093 \cdot \frac{0{,}39}{\sqrt{20}} \le \overline{x} \le 36{,}3385 + 2{,}093 \cdot \frac{0{,}39}{\sqrt{20}}$$

или

$$36{,}0824 \le \overline{x} \le 36{,}5946.$$

Вывод: ожидаемый диаметр $\overline{x} = 36{,}3385$ металлического хомута с доверительным интервалом $36{,}0824 \le \overline{x} \le 36{,}5946$ возникает с вероятностью $\approx 100\%$. Грубые погрешности измерения (промахи) отсутствуют, абсолютная погрешность измерения составляет ≈ 18 %, относительная погрешность измерения ≈ 0,5 % и систематические погрешности измерения составляют ≈ 8,2 %.