

5. Гусева Д.Р., Перова Т.Н., Платонова Е.А., Агишева Д.К. Графический анализ устойчивости // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4 – С. 46-47.

### ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОТОБРАЖЕНИИ ОБЛАСТЕЙ

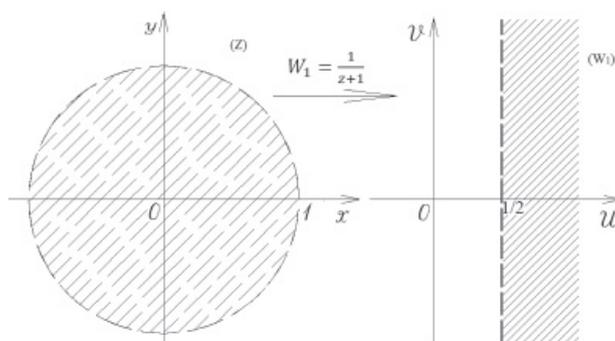
Светличная В.Б., Воронин А.А.

Волжский политехнический институт,  
филиал Волгоградского государственного технического  
университета, Волжский, www.volpi.ru,  
e-mail: tolikik@mail.ru

#### Понятие конформного отображения

Теория и практика конформных отображений имеет широкое применение в различных областях: в теории потенциала, в задачах гидродинамики и электростатики, теории упругости.

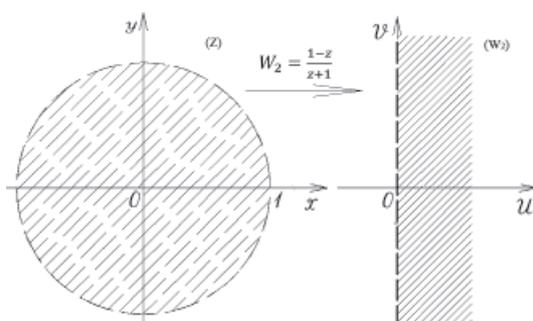
Во многих случаях возникает проблема сведения задачи, решаемой в некоторой заданной области, к решению ее в другой области. Это – проблема нахождения отображения областей.



На первом этапе «распрямили» окружность, то есть подберем функцию, переводящую одну из точек окружности в бесконечно удаленную точку.

$$W_1 = \frac{1}{z+1},$$

где  $W_1(-1) = \infty$ . Найдем уравнение прямой, в которую переходит  $|z| = 1$  при отображении  $W_1 = \frac{1}{z+1}$ .



Вторым этапом является смещение (сдвиг) влево на 1/2, то есть линейное отображение  $W_2 = W_1 = 1/2$ . образом  $Re W_1 = 1/2$  будет  $Re W_2 = 0$ .

$$W_2 = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \text{ или } W_2 = \frac{1-z}{z+1}.$$

При отображении  $W_2$  образом области  $D$  является правая полуплоскость  $Re W_2 > 0$ .

На третьем этапе осуществляется поворот в плоскости  $W_2$  на  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки, то есть

Для плоских областей такое отображение

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

может отображаться в виде  $w = f(z)$ ,  $u = \text{Re}f(z)$ ,  $v = \text{Im}f(z)$ , то есть сводится к нахождению соответствующей аналитической функции.

Покажем на примере: найдем дробно-линейную функцию, отображающую круг единичного радиуса с центром в начале координат на верхнюю полуплоскость. То есть требуется найти отображение области  $D: |z| < 1$  на область  $G: \text{Im} z > 0$ . Границей области  $D$  является окружность  $|z| = 1$ . Ее образ – прямая. Из теории: окружности и прямые, проходящей через особую точку  $z = -d/c$  дробно-линейной функции

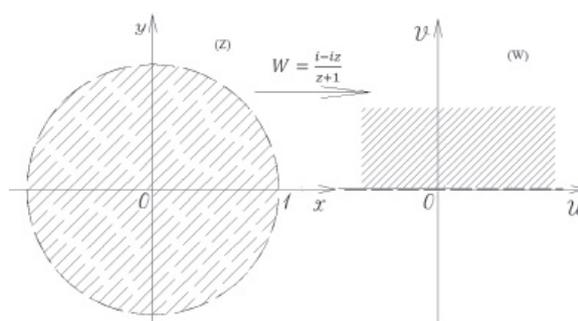
$W = \frac{az+b}{cz+d}$ , отображаются в прямые. Поэтому искомая функция должна иметь особую точку одну из точек окружности  $|z| = 1$ .

Тогда

$$z = \frac{1-W_1}{W_1}, \quad \left| \frac{1-W_1}{W_1} \right| = 1, \quad |1-W_1| = |W_1|.$$

Последнее уравнение задает прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему точки  $W_1 = 1$  и  $W_1 = 0$ , через его середину, то есть  $Re W_1 = 1/2$ .

Образом области  $D$  будет  $G: Re W_1 > 1/2$ .



$$W = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot W_2 = i \cdot W_2, \quad W = \frac{i-z}{z+1}.$$

#### Список литературы

1. О взаимосвязи математики и сопротивления материалов как учебных дисциплин технического вуза / В.Б. Светличная, В.И. Соколов, В.Н. Тышкевич. – Волгоградский государственный технический университет, 2008. – Т.5. – № 5. – С. 85–87
2. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М.: Высшая школа, 2001. – С. 115–116.