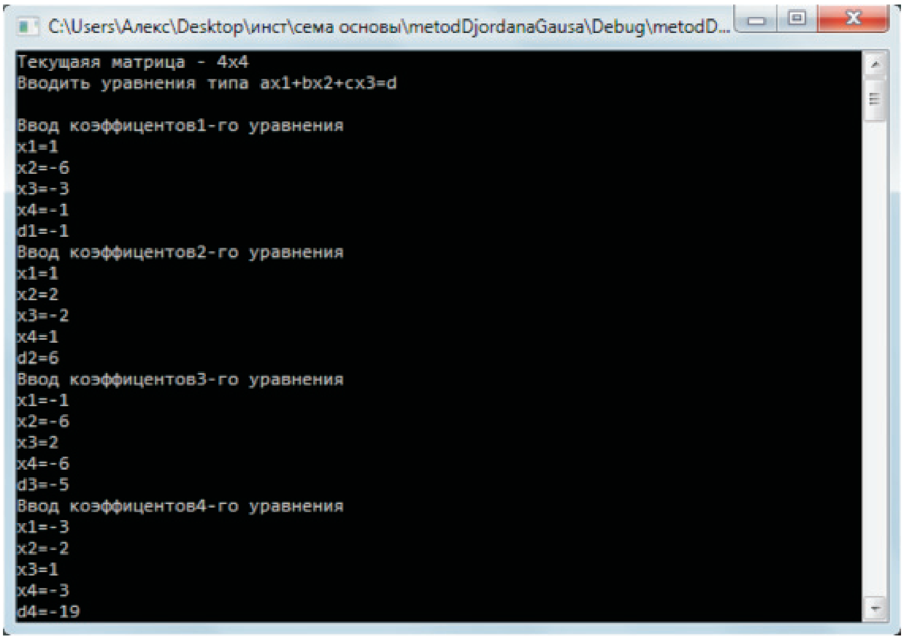

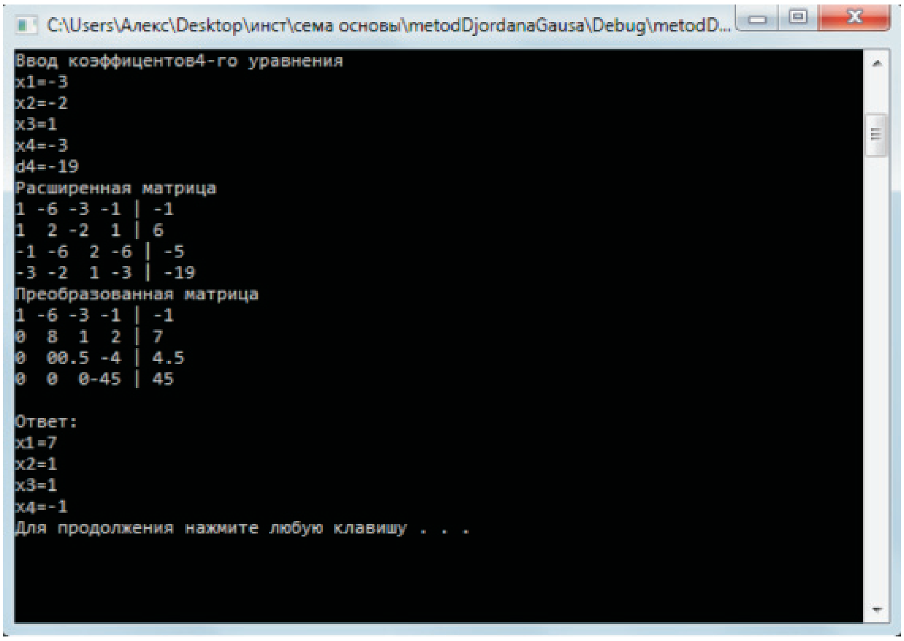

Значительная часть численных методов решения различных (в особенности – нелинейных) задач включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Савицкий И.В., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: savickijugor@mail.ru

В разделе математики «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» мы изучили скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Я случайно увидел в некоторых книгах информацию о двойном векторном произведении и решил подробнее узнать о нём и его свойствах.

Пусть вектор $\vec{a}$ умножается векторно на вектор $\vec{b}$, после чего полученный вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ умножается снова векторно на вектор $\vec{c}$. В результате получается так называемое двойное векторное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{d}$ (ясно, что в результате имеем $\vec{d}$-вектор).

Двойное векторное произведение вычисляется по формуле

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\vec{c}\right). \qquad (1)$$

В общем случае, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\neq\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Покажем это, используя свойства векторного и скалярного произведения двух векторов

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right). \qquad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) можно вывести следующее правило для запоминания: двойное векторное произведение равно произведению среднего вектора на скалярное произведение двух других, минус крайний вектор скобки, умноженный на скалярное произведение двух других или говорят $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ равно «б а ц» минус «ц а б».

При круговой перестановке векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ формула (1) приводит к трем разным векторам:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\vec{c}\right);$$

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{c}\right);$$

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Складывая вместе эти три равенства, получим тождество

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}=0.$$

Одно из применений формулы (2) состоит в выводе разложения данного вектора $\vec{b}$, на две компоненты, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору $\vec{a}$. В самом деле, положив в формуле (2) $\vec{c}=\vec{a}$, найдем:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right).$$

Решая это уравнение относительно $\vec{b}$, получим:

$$\vec{b}=\frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)}{\vec{a}^2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{\vec{a}^2}\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right). \qquad (3)$$

Первый из слагаемых векторов правой части, очевидно, параллелен вектору $\vec{a}$, а второй перпендикулярен к нему. Формула (3) для разложения упрощается, если $\vec{a}$ есть единичный вектор. Тогда $\vec{a}^2=1$ и формула (3) примет вид:

$$\vec{b}=\left(\vec{a}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right).$$

Рассмотрим следующий пример: показать, что если $\vec{a}\perp\vec{b}$ то

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right)=\vec{a}^4\cdot\vec{b}.$$

По формуле (2) имеем

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\vec{a}\vec{b}\right)-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)=-\vec{b}\cdot\vec{a}^2$$

т.к. $\vec{a}\vec{b}=0(\vec{a}\perp\vec{b})$.

Умножая векторно слева на $\vec{a}$, получим:

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)=\vec{a}\times\left(-\vec{b}\cdot\vec{a}^2\right)=-\vec{a}^2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}^2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

Повторяя ту же операцию, найдем:

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right)=\vec{a}\times\left(\vec{a}^2\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=$$

$$=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\left(\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\vec{b}\right)\right)=\vec{a}^2\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}^2=\vec{a}^4\cdot\vec{b},$$

что и требовалось.

Таким образом, я познакомился с двумя случаями произведений трех векторов в трехмерном пространстве: скалярно-векторное (в результате получаем число) и двойное векторное произведение (в результате получаем вектор).

Список литературы

1. Кочин Н.Е. Введение в векторный и тензорный анализ.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.
3. Высшая математика для технических университетов. Линейная алгебра: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов.

МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Савченко Ю.М., Кравченко И.Ю., Цой А.Ю., Агишева Д.К.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: mathemat@volpi.ru

Метод искусственного базиса применяется к решению задач линейного программирования в общем случае, когда система ограничений не имеет предпочитаемого вида. Рассмотрим следующий пример.

Задача о диете. Симпатичная девушка узнала из дамского журнала, что для того чтобы волосы стали более шелковистыми, организм должен получать ежедневно не менее 40 г питательного вещества А, не менее 4 г питательного вещества Б и не менее 30 г питательного вещества В. Девушка знает, что в 1 кг яблок содержится 10 г вещества Б и 50 г вещества В, а в 100 г огурцов содержится 40 г вещества А и по 20 г веществ Б и В. Цена яблок – 60 руб. за 1 кг, цена огурцов – 50 руб. за 1 кг. Требуется помочь девушке составить рацион, помогающий увеличить шелковистость волос и при этом имеющий наименьшую стоимость.

Решение. Обозначим x_1 и x_2 массу приобретаемых девушкой яблок и огурцов, тогда общее количество получаемого в рационе питательного вещества А будет равно $40x_2$ (г), количество вещества Б в рационе составит $10x_1 + 20x_2$ (г), а количество вещества В составит $50x_1 + 20x_2$ (г). При этом общая стоимость приобретаемых продуктов составит $60x_1 + 50x_2$ руб. Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$Z=60x_1+50x_2\to\min;$$

$$\begin{cases}40x_2\ge 40,\\10x_1+20x_2\ge 4,\\50x_1+20x_2\ge 30,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Для превращения системы ограничений в систему уравнений необходимо ввести балансовые неизвестные x_3, x_4 и x_5:

$$Z=60x_1+50x_2\to\min;$$

$$\begin{cases}40x_2-x_3=40,\\10x_1+20x_2-x_4=4,\\50x_1+20x_2-x_5=30.\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4,5.$$