Пусть $c_1 = 1$, тогда $\overline{e_1} = \{-1,0,1\}$.

Аналогично, для $\lambda_1 = 3$: $(A-3E)\overline{e_2} = \overline{0}$ получаем собственный вектор $\overline{e_2} = \{1,1,1\}$;

для $\lambda_3 = 5$: $(A-5E)\overline{e_3} = \overline{0}$ получаем собственный вектор $\overline{e_3} = \{0,1,1\}$.

Из полученных собственных векторов $\overline{e_1} = \{-1,0,1\}$, $\overline{e_2} = \{1,1,1\}$, $\overline{e_3} = \{0,1,1\}$ составим собственный базис, в котором матрица А принимает диагональный вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

где $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к новому базису.

Построим каноническое разложение матрицы А: $A = B\Lambda B^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим решения систем линейных уравнений $AX = D_k$, где $D_1 = (1, 2, 3)^T$, $D_2 = (-2, 4, 0)^T$с помощью канонического разложения матрицы А.

Подставим в исходную систему $AX = D_k$ каноническое разложение матрицы и получим $B\Lambda B^{-1}X = D$. Умножим обе части уравнения слева на B^{-1} и введем замену $B^{-1}X = Z$.

Тогда $\Lambda Z = B^{-1}D$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{k1} \\ d_{k2} \\ d_{k3} \end{pmatrix}.$$

Для $D_1 = (1, 2, 3)^T$ имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1, \\ z_2 = 2/3, \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$X_1 = BZ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

– единственное решение системы.

Аналогично, для $D_2 = (-2, 4, 0)^T$ получаем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 4, \\ z_2 = -2, \\ z_3 = 2. \end{cases}$$

$$X_2 = BZ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

– единственное решение системы.

Таким образом, каноническое разложение матрицы позволяет сократить вычисления при решении систем линейных алгебраических уравнений с одной и той же основной матрицей.

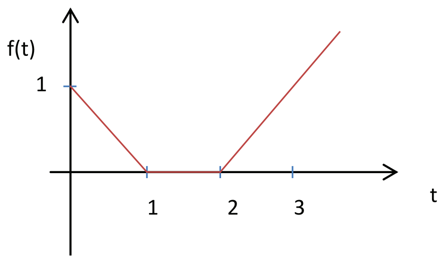
РЕШЕНИЕ ОПЕРАЦИОННЫМ СПОСОБОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Калюжный Д.А., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru, e-mail: D-I-M-A-N-N@yandex.ru

Операционное исчисление можно применять для широкого класса кусочно-непрерывных функций $f(t)$ и функцией, заданных графически. Это может быть, например, входной сигнал, действующий на систему автоматического регулирования:

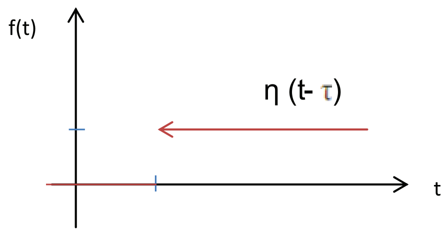
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-t, & 0 < t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \\ t-2, & t > 2 \end{cases}$$



Запишем аналитическое выражение оригинала с помощью единичной ступенчатой функции:

$$f(t) = (1 - t)(\eta(t) - \eta(t - 1) + (t - 2)\eta(t - 2),$$

где $\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \le \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases}$



Решим задачу Коши

$$x'' - 9x = f(x),$$

где $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, где $f(t)$ – функция, рассмотренная выше.

Решение:

1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) = X(p),$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1.$$

$f(t)$ можно преобразовать:

$$f(t) = \eta(t) - t\eta(t) + (t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2).$$

Тогда, используя теорему запаздывания, изображение этой функции:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

Запишем уравнение для изображений:

$$p^2X(p) - 1 - 9X(p) = \frac{1}{p^2}\left(P - 1 + e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

2. Найдем $X(p)$ – изображение решения исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$X(p) = \frac{1}{p^2-9} + \frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}\left(e^{-p}+e^{-2p}\right) + \frac{1}{p\left(p^2-9\right)} - \frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}.$$

3. По таблице соответствия изображений оригиналам, найдем $x(t)$:

$$\frac{1}{3}\frac{3}{p^2-9} \leftrightarrow \frac{1}{3}\mathrm{sh}(3t);$$

$$-\frac{1}{9}\frac{9}{p^2\left(p^2-9\right)} \leftrightarrow \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{sh}(3t)+t\right) = \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t);$$

$$\frac{1}{p\left(p^2-9\right)} = -\frac{1}{p(p-3)(p+3)} \leftrightarrow \frac{6e^{0t}+3e^{3t}+3e^{-3t}}{54} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{18}e^{-3t};$$

$$\frac{e^{-p}+e^{-2p}}{p^2\left(p^2-9\right)} \leftrightarrow \left(-\frac{1}{9}(t-1)+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-3)\right)\eta(t-1)+$$

$$+\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-6)\right)\eta(t-2).$$

Т.о. решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(t) = \frac{1}{3}\mathrm{sh}(3t) + \frac{1}{9}t - \frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t) - \frac{1}{9} + \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{1}{18}e^{-3t} +$$

$$+\left(-\frac{1}{9}(t-1)+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-3)\right)\eta(t-1) + \left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-6)\right)\eta(t-2) =$$

$$= \frac{8}{27}\mathrm{sh}(3t) + \frac{1}{9}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{18}e^{3t} - \frac{1}{18}e^{-3t} + \left(-\frac{1}{9}(t-1)+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-3)\right)\eta(t-1)+$$

$$+\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\mathrm{sh}(3t-6)\right)\eta(t-2).$$

Список литературы

1. О взаимосвязи математики и сопротивления материалов как учебных дисциплин технического вуза / В.Б. Светличная, В.И. Соколов, В.Н. Тышкевич. – Волгоградский государственный технический университет, 2008. – Т.5. – № 5. – С. 85–87.

2. Специальные главы математики: операционное исчисление / Т.А. Матвеева, Д.К. Агишева, С.А. Зотова. – ВПИ(филиал) ВолгГТУ, 2010. – 56 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВЗРЫВОМ ПЛОСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ФОЛЬГИ

Калюжный Д.А., Сухова Т.А., Суркаев А.Л.

Волжский политехнический институт, филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: vpf@volpi.ru

В настоящее время электрический взрыв проводников (ЭВП) находит широкое применение во многих фундаментальных и прикладных задачах. Электрический взрыв кольцевой фольги [1], для реализации которого разность потенциалов подается на центральную и периферийную область фольги, представляет определенный интерес в исследованиях ЭВП.

Целью данной работы является экспериментальное исследование пластической деформации круглой пластины с защемленными краями, осуществляемой электрическим взрывом плоской кольцевой фольги, ток разряда по которой протекает в радиальном направлении, в замкнутой камере с конденсированной средой.

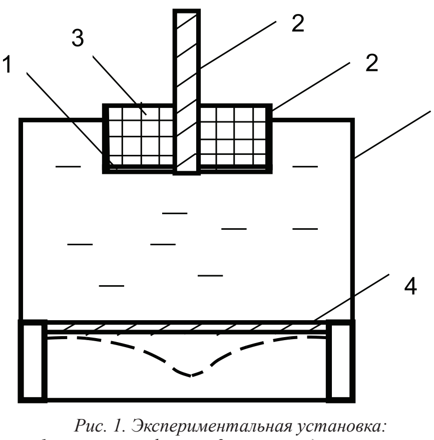


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – кольцевая фольга; 2 – электродная система; 3 – диэлектрический цилиндр; 4 – пластинчатый датчик; 5 – взрывная камера

Энергетическая установка представляет собой накопитель энергии конденсаторного типа с сопут-