

Для этапов постоянной длины дуги контакта V_n и выхода V_b :

$$V_n(\tau) = \int_{-R}^{t-R} dy \int_0^{\frac{y+R}{\operatorname{tg} \alpha}} dx \int_0^{\sqrt{(x-x_0)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2} + l_s} dz = \frac{\tau v_s t^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}; \quad (2)$$

$$V_b(\tau) = \frac{b_s t^2}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \int_0^{b-\tau v_s} dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^a dy \int_0^{\frac{R-\sqrt{y^2+z^2}}{\operatorname{tg} \alpha}} dx = \frac{\tau v_s t^2}{2 \operatorname{tg} \alpha} - V_p(\tau) = V_n(\tau) - V_p(\tau). \quad (3)$$

Из наработок (1)–(3) делением на время получены формулы режущей способности и дифференцированием по времени – формулы мгновен-

ной режущей способности для этапов врезания (Q_p, q_p), постоянной дуги контакта (Q_n, q_n) и выхода (Q_b, q_b):

$$Q_p(\tau) = \frac{V_p(\tau)}{\tau} = \frac{1}{6\tau \operatorname{tg} \alpha} \left(6R a \tau v_s - 4abR + R^3 \left(\arcsin \frac{b}{R} - \arcsin \frac{b_s}{R} \right) + 2ab_s \sqrt{a^2 + b_s^2} - \right. \\ \left. - 2Rb_s \sqrt{R^2 - b_s^2} + a^3 \ln \left(\frac{b_s + \sqrt{a^2 + b_s^2}}{b+R} \right) + b_s^3 \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b_s^2}}{R - \sqrt{R^2 - b_s^2}} \right) \right); \\ q_p(\tau) = \frac{dV_p}{d\tau} = \frac{v_s}{6\operatorname{tg} \alpha} \left(6Ra - 3a\sqrt{a^2 + b_s^2} + 3R\sqrt{R^2 - b_s^2} + 3b_s^2 \ln \left(\frac{R - \sqrt{R^2 - b_s^2}}{a + \sqrt{a^2 + b_s^2}} \right) \right); \\ Q_n(\tau) = q_n(\tau) = \frac{v_s t^2}{2\operatorname{tg} \alpha}; \quad Q_b(\tau) = Q_n - Q_p(\tau); \quad q_b(\tau) = q_n - q_p(\tau).$$

Список литературы

1. Носенко В.А., Авилов А.В., Жуков В.К.. Площадь и толщина сечения срезаемого слоя на операции плоского глубинного шлифования: справочник // Инженерный журнал. – 2006. – №1. – С. 22–27.
2. Носенко В.А., Жуков В.К. Некоторые аспекты кинематики плоского глубинного шлифования // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – №1. – С. 78–94.
3. Носенко В.А. Специфика удаления материала на различных этапах плоского глубинного шлифования кругами конического профиля / В.А. Носенко, В.К. Жуков, С.А. Зотова, С.В. Носенко // СТИИ. – 2008. – №3. – С. 23–29.
4. Носенко В.А. Математическая модель наработки при глубинном шлифовании горизонтальной поверхности кругом конического профиля / В.А. Носенко, С.А. Зотова, С.В. Носенко // Известия ВолгГТУ. – 2008. – Вып.4. – №9. – С. 29–33.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

Инкин А.Н., Матвеева Т.А.

Волжский политехнический институт, филиал волгоградского государственного технического университета, Волжский, e-mail: ANInkin@mail.ru

Приведение матриц к диагональному виду значительно упрощает решение многих прикладных задач,

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ -2 & 7-\lambda & -2 \\ -2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -4 & 4 \\ -2 & (7-\lambda) & -2 \\ 0 & (\lambda+1) & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 0 & 4 \\ -2 & (5-\lambda) & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$-(\lambda+1)(3-\lambda)(5-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ – собственные значения.

Каждому собственному значению λ_k с учетом его кратности найдем соответствующие собственные

находит широкое применение при моделировании линейных динамических систем, а также при решении систем линейных алгебраических уравнений.

В данной работе рассматриваются вопросы решения систем линейных алгебраических уравнений с одинаковыми основными матрицами систем (разными свободными членами). В этом случае удобно использовать каноническое разложение основной матрицы системы.

Рассмотрим решение следующих систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 1, \\ -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2, \\ -2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & 7 & -2 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Построим каноническое разложение основной матрицы системы А. Для этого составим характеристическое уравнение матрицы А и найдем его корни:

векторы по формуле $(A - \lambda_k E) \bar{e}_k = 0$.
Для $\lambda_1 = -1$:

$$(A + E) \bar{e}_1 = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & | & 0 \\ -2 & 8 & -2 & | & 0 \\ -2 & 8 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \\ 0 & 6 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} -c_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c_1 = 1$, тогда $\bar{e}_1 = \{-1, 0, 1\}$.

Аналогично, для $\lambda_1 = 3$: $(A - 3E)\bar{e}_2 = \bar{0}$ получаем собственный вектор $\bar{e}_2 = \{1, 1, 1\}$;

для $\lambda_3 = 5$: $(A - 5E)\bar{e}_3 = \bar{0}$ получаем собственный вектор $\bar{e}_3 = \{0, 1, 1\}$.

Из полученных собственных векторов $\bar{e}_1 = \{-1, 0, 1\}$, $\bar{e}_2 = \{1, 1, 1\}$, $\bar{e}_3 = \{0, 1, 1\}$ составим собственный базис, в котором матрица A принимает диагональный вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

где $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к новому базису.

Построим каноническое разложение матрицы A : $A = B\Lambda B^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим решения систем линейных уравнений $AX = D_k$, где $D_1 = (1, 2, 3)^T$, $D_2 = (-2, 4, 0)^T$ с помощью канонического разложения матрицы A .

Подставим в исходную систему $AX = D_k$ каноническое разложение матрицы и получим $B\Lambda B^{-1}X = D_k$. Умножим обе части уравнения слева на B^{-1} и введем замену $B^{-1}X = Z$.

Тогда $\Lambda Z = B^{-1}D$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{k1} \\ d_{k2} \\ d_{k3} \end{pmatrix}.$$

Для $D_1 = (1, 2, 3)^T$ имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1, \\ z_2 = 2/3, \\ z_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$X_1 = BZ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

– единственное решение системы.

Аналогично, для $D_2 = (-2, 4, 0)^T$ получаем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 4, \\ z_2 = -2, \\ z_3 = 2. \end{cases}$$

$$X_2 = BZ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

– единственное решение системы.

Таким образом, каноническое разложение матрицы позволяет сократить вычисления при решении систем линейных алгебраических уравнений с одной и той же основной матрицей.

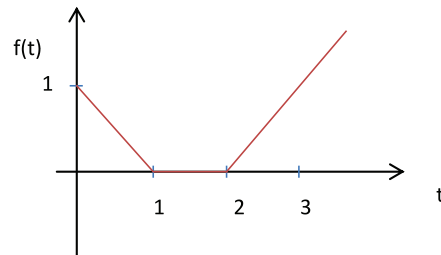
РЕШЕНИЕ ОПЕРАЦИОННЫМ СПОСОБОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНОЙ ПРАВой ЧАСТЬЮ

Калюжный Д.А., Светличная В.Б.

Волжский политехнический институт,
филиал Волгоградского государственного технического университета, Волжский, www.volpi.ru,
e-mail: D-I-M-A-N-N@yandex.ru

Операционное исчисление можно применять для широкого класса кусочно-непрерывных функций $f(t)$ и функций, заданных графически. Это может быть, например, входной сигнал, действующий на систему автоматического регулирования:

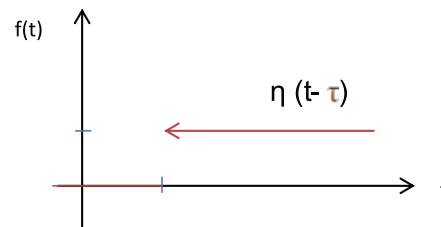
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1-t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \\ t-2, & t > 2 \end{cases}$$



Запишем аналитическое выражение оригинала с помощью единичной ступенчатой функции:

$$f(t) = (1-t)(\eta(t) - \eta(t-1)) + (t-2)\eta(t-2),$$

$$\text{где } \eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases}$$



Решим задачу Коши

$$x'' - 9x = f(x),$$

где $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, где $f(t)$ – функция, рассмотренная выше.

Решение:

1. Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) = X(p),$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - 1.$$