в частности, порожденные наложением ошибок измерения на значения случайных величин.

Рассмотрим иное направление в статистике интервальных данных, также представляющееся многообещающим. В нем развиваются асимптотические методы статистического анализа интервальных данных при больших объемах выборок и малых погрешностях измерений. В отличие от классической математической статистики, сначала устремляется к бесконечности объем выборки и только потом – уменьшаются до нуля погрешности.

Статистика объектов нечисловой природы как часть прикладной статистики подлежит следующей классификации:

– статистика (числовых) случайных величин;

– многомерный статистический анализ;

– статистика временных рядов и случайных процессов;

– статистика объектов нечисловой природы.

Три первые области являются классическими. Остановимся на четвертой, которая только еще входит в массовое сознание специалистов. Ее называют также статистикой нечисловых данных либо просто нечисловой статистикой.

Исходный объект в математической статистике – это выборка. В вероятностной теории статистики выборка – это совокупность независимых идентично распределенных случайных элементов. В классической математической статистике (которую обычно преподают студентам) элементы выборки – это числа. В многомерном статистическом анализе – вектора. А в нечисловой статистике элементы выборки – это объекты нечисловой природы, которые нельзя складывать и умножать на числа. Другими словами, объекты нечисловой природы лежат в пространствах, не имеющих векторной структуры.

Образцами объектов нечисловой природы являются:

– значения качественных признаков, т.е. результаты кодировки объектов с помощью заданного перечня категорий (градаций);

– упорядочения (ранжировки) экспертами образцов продукции (при оценке ее технического уровня и конкурентоспособности)) или заявок на проведение научных работ (при проведении конкурсов на выделение грантов);

– классификации, т.е. разбиения объектов на группы сходных между собой (кластеры);

– толерантности, т.е. бинарные отношения, описывающие сходство объектов между собой, например, сходства тематики научных работ, оцениваемого экспертами с целью рационального формирования экспертных советов внутри определенной области науки;

– результаты парных сравнений или контроля качества продукции по альтернативному признаку («годен» – «брак»), т.е. последовательности из 0 и 1;

– множества (обычные или нечеткие), например, зоны, пораженные коррозией, или перечни возможных причин аварии, составленные экспертами независимо друг от друга;

– слова, предложения, тексты;

– вектора, координаты которых – совокупность значений разнотипных признаков, например, результат составления статистического отчета о научно-технической или заполненная компьютеризированная история болезни, в которой часть признаков носит качественный характер, а часть – количественный;

– ответы на вопросы экспертной, маркетинговой или социологической анкеты, часть из которых носит количественный характер (возможно, интервальный), часть сводится к выбору одной из нескольких подсказок, а часть представляет собой тексты; и т.д.

Интервальные данные тоже можно рассматривать как пример объектов нечисловой природы, то есть, как частный случай нечетких множеств.

Прикладная статистика нацелена на решение реальных задач. Поэтому в ней возникают новые постановки математических задач анализа статистических данных, развиваются и обосновываются новые методы. Обоснование часто проводится математическими методами, то есть путём доказательства теорем. Большую роль играет методологическая составляющая – как именно ставить задачи, какие предположения принять с целью дальнейшего математического изучения. Велика роль современных информационных технологий, в частности, компьютерного эксперимента.

Хотя статистические данные собираются и анализируются с незапамятных времён, современная математическая статистика как наука была создана, по общему мнению специалистов, сравнительно недавно – в первой половине XX в. Именно тогда были разработаны основные идеи и получены результаты, излагаемые ныне в учебных курсах математической статистики. После чего специалисты по математической статистике занялись внутри математическими проблемами, а для теоретического обслуживания проблем практического анализа статистических данных стала формироваться новая дисциплина – прикладная статистика. В настоящее время статистическая обработка данных проводится, как правило, с помощью соответствующих программных продуктов.

Список литературы

1. Орлов А. И. Эконометрика: учебник для вузов. – 3-е, изд. испр. и доп. – М.: Изд-во «Экзамен», 2004. – 576 с.
2. Орлов А.И. О перестройке статистической науки и её применений // Вестник статистики. – 1990. – № 1. – С. 65–71.
3. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
4. Котц С., Смит К. Пространство Хаусдорфа и прикладная статистика: точка зрения ученых СССР. – The American Statistician. – November 1988. – Vol. 42. – № 4. – P. 241–244.
5. Орлов А.И. Прикладная статистика: учебник для вузов. – М.: Экзамен, 2006. – 672 с.
6. Орлов А.И. Теория принятия решений: учебник для вузов. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.

РЕПРЕЗЕНТАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Хитрова Ю.Е.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: Happy___time@mail.ru

Репрезентативная теория измерений (РТИ) представляет собой одну из составных частей статистики объектов нечисловой природы. Мнения экспертов часто выражаются в порядковой шкале, т.е. эксперт может сказать, что один из показателей качества продукции важнее другого, первый технологический объект опаснее второго, и т.д., но не в силах сказать, во сколько раз или насколько он более важен, соответственно, более опасен. Экспертов зачастую просят представить объекты в порядке убывания (возрастания) интенсивности экспертизы характеристики, которая интересует организаторов. Формально ранги могут быть представлены числами 1, 2, 3, ..., но с этими числами невозможно производить привычные арифметические операции. Например, хотя $1 + 2 = 3$, но нельзя говорить, что для объекта, который стоит на третьем месте в упорядочении, интенсивность изучаемой характеристики будет равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Одним из видов экспертного оценивания являются отметки учащихся. В данном случае вряд ли кто-либо будет говорить о том, что знания отличника будут равны сумме знаний троечника и двоечника (хотя 5 = 2 + 3), хорошист будет соответствовать двум двоечникам (2 + 2 = 4) и что между отличником и троечником существует такая же разница, как между хорошистом и двоечником (5 – 3 = 4 – 2). Отсюда можно сделать вывод, что для анализа подобного рода качественных данных нужна теория, которая сможет дать базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Это и есть репрезентативная теория измерений (РТИ).

На сегодняшний день термин «теория измерений» применяется для обозначения классической метрологии, РТИ, некоторых других направлений(например, алгоритмической теории измерений).

В одной из первых отечественных работ по РТИ было отмечено, что баллы, которые присваиваются экспертами при оценке, зачастую измеряются в порядковой шкале.

В соответствии с РТИ при математическом моделировании реального явления или процесса, прежде всего, необходимо установить, в каких типах шкал измерены переменные. Тип шкалы задает группу допустимых преобразований. Существуют основные виды шкал измерения и соответствующие группы допустимых преобразований. Например, шкала наименований, где допустимыми являются все взаимно-однозначные преобразования (т.е. числа применяютсякак метки), порядковая шкалас строго возрастающими преобразованиями, шкала интервалов с линейными возрастающими преобразованиями, шкала отношений с изменяющими только масштаб преобразованиями иабсолютная шкала, в которой допустимым является лишь тождественное преобразование.

Оценки экспертов зачастую необходимо считать измеренными в порядковой шкале, потому что, как показали многократные опыты, человекулегче ответить на вопросы качественного (например, сравнительного, характера), чем количественного. Таким образом,человеку проще сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их приблизительный вес в граммах.

Порядковая шкала и шкала наименований являются шкалами качественных признаков. Поэтому результаты качественного анализа во многих областях могут быть рассмотрены как измеренные по этим шкалам.

Шкалы качественных признаков – это шкалы интервалов, отношений, разностей. По шкале интервалов можно измерить величину потенциальной энергии или координату точки на прямой, на которой не отмечены ни начало, ни единицы измерения; по шкале отношений – большую часть физических единиц (массу тела, длину, заряд, а также цены в экономике). Время, в свою очередь, измеряется по шкале разностей, если мы принимаем год естественной единицей измерения, и по шкале интервалов в общем случае. В процессе развития соответствующей области знания тип шкалы может изменяться. Среди специалистов иногда возникают разногласия по поводу того, по каким шкалам необходимо считать измеренными те или иные реальные величины.

Основным требованием к алгоритмам анализа данных в РТИ считается следующее: выводы на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны изменяться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных .Таким образом, целью теории измерений является борьба с субъективизмом исследователя при приписывании численных значений реальным объектам. Так, расстояние можно измерять в метрах, микронах, милях, парсеках и других единицах измерения. Выбор единиц измерения зависит только от исследователя, т.е. является субъективным. Статистические выводы будут адекватны реальности только тогда, когда они не будут зависеть от того, какую единицу измерения выберет исследователь.То есть тогда, когда они будут инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы.

Рассмотрим в качестве примера обработку мнений экспертов, которые были измерены в порядковой шкале. Пусть $Y_1, Y_2, ..., Y_n$,...,–это совокупность оценок экспертов, выставленных одному объекту экспертизы, $Z_1, Z_2, ..., Z_n$,..., – второму.

Легче всего сравнить эти совокупности по средним значениям. Нам известны различные виды средних величин: среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое, медиана, мода. Обобщением нескольких изперечисленных является среднее по Колмогорову. Для чисел $X_1, X_2, ..., X_n$..., среднее по Колмогорову вычисляется по формуле

$$G\{(F(X_1) + F(X_2) + ...F(X_n))/n\},$$

где F – строго монотонная функция; G – функция, обратная к F. Если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову – это среднее арифметическое, если $F(x) = \ln x$, то среднее геометрическое, если $F(x) = 1/x$, то среднее гармоническое, и т.д. Медиану и моду нельзя представить в виде средних по Колмогорову.

Общее понятие среднего (по Коши) таково: средней величиной является любая функция $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2, ..., X_n$,,..., и не больше, чем максимальное из этих чисел.

При допустимом преобразовании шкалы значение средней величиныменяется. Но выводы о том, для какой из совокупностей среднее больше, а для какой – меньше, не должны меняться (в соответствии с требованием инвариантности выводов, принятом в РТИ) .Выразим соответствующую математическую задачу поиска вида средних величин, результат сравнения которых устойчив относительно допустимых преобразований шкалы. Пусть $f(X_1, X_2, ..., X_n)$f(,,...) – среднее по Коши. Пусть

$$f(Y_1, Y_2, ..., Y_n) < f(Z_1, Z_2, ..., Z_n). \quad (1)$$

Тогда для устойчивости результата сравнения средних нужно, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований соответствующей шкалы было справедливо также неравенство

$$f(g(Y_1), g(Y_2),..., g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2),..., g(Z_n)),(2)$$

т.е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. При этом сформулированное условие должно быть верно для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ и $Z_1, Z_2, ..., Z_n$. Согласно репрезентативной теории измерений только такими средними можно пользоваться.

Отсюда можно сделать вывод, что из всех средних по Коши в порядковой шкале в качестве средних могут быть использованы только члены вариационного ряда, в частности, медиана, но не среднее арифметическое, среднее геометрическое и т.д.; в шкале интервалов из всех средних по Колмогорову может применяться только среднее арифметическое; в шкале отношений устойчивыми относительно сравнения являются только степенные средние и среднее геометрическое.

Также в настоящее время распространены экспертные, маркетинговые, квалиметрические, социологические и другие опросы. В них опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам, заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т.п., после чего рассчитывают средние баллы и рассматривают их как интегральные оценки, которые были выставлены коллективом опрошенных. Часто применяют среднее арифметическое, но такой способ считается некорректным, так как баллы обычно измеряются в порядковой шкале. Обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Тем не менее, полностью игнорировать средние арифметические неразумно из-за их распространенности. Поэтому целесообразно применять оба метода сразу – метод средних арифметических рангов (баллов) и методов медианных рангов. Данная рекомендация находится в согласии с концепцией устойчивости ,которая рекомендует использовать различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах.

В заключении, можно сказать, что репрезентативная теория измерений может дать необходимые рекомендации по выбору методов анализа статистических данных, которые измеряются в тех или иных шкалах, и является частью научного инструментария специалиста по математическим методам исследования.

Список литературы

1. Орлов А.И.. Экспертные оценки: учебное пособие. – М., 2002.

2. Стивенс С.С. Экспериментальная психология. Т.1. – М.: ИЛ, 1960. – С. 5–78.

3. Орлов А.И. Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. – М.: Наука, 1974. – С. 388–393.

4. Толстова Ю.Н. Социологические исследования. – 1978. – № 3. – С. 178–184.

5. Толстова Ю.Н. Экономика и математические методы. – 1978. – Т. XIV. – № 3. – С. 598–603.

6. Орлов А.И. Прикладной многомерный статистический анализ. – М.: Наука, 1978. – С. 68–138.

7. http://www.aup.ru/books/m154/4.htm.

8. http://psyfactor.org/lib/pahomov.htm.

9. http://www.aup.ru/books/m163/1_1_3.htm.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Цысь Ю.В., Долгополова А.Ф.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: yulaytsys@rambler.ru

В современной экономике используется множество математических методов, разработанных ещё в 20 веке. Применение линейной алгебры значительно упростило решение многих экономических задач. В данной работе рассматриваются основные способы решения задач с помощью элементов линейной алгебры.

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра – имеют большое значение для экономистов, основная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в простой и компактной матричной форме. С помощью матриц удобно описывать различные экономические закономерности. Например, дана следующая таблица средних розничных цен на автомобили в зависимости от срока их службы (условных единиц).

Продолжительность службы (годы)	Годы		
	2005	2006	2007
1	1881	2120	2445
2	1512	1676	1825
3	1261	1397	1484
4	1054	1144	1218

Предложенную таблицу можно записать в виде матрицы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1881 & 2120 & 2445 \\ 1512 & 1676 & 1825 \\ 1261 & 1397 & 1484 \\ 1054 & 1144 & 1218 \end{pmatrix},$$

где содержательное значение каждого показателя определяется его местом в матрице. К примеру, число 1825 во второй строке третьего столбца представляет собой цену прослужившего 2 года автомобиля в 2007 году. Аналогичным образом находим, что числа, записанные в строку, характеризуют цены автомобилей, прослуживших один и тот же срок в различные годы, а числа в столбце – цены автомобилей различного срока службы в данном году.

Таким образом, место, занимаемое числом в матрице, характеризует продолжительность использования автомобиля и год, к которому относится цена.

Применение матриц при решении экономических задач рассмотрим на следующем примере. Предприятие выпускает продукцию трех видов P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1, S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 20 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1,2$) показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100\ \ 80\ \ 130)$. Стоимость единицы каждого типа сырья (денежных единиц) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.. Необходимо найти общую стоимость сырья.

Решение: Затраты первого сырья составляют $S_1 = 2\cdot100 + 5\cdot80 + 1\cdot130 = 730$единиц, а второго $S_2 = 3\cdot100 + 2\cdot80 + 4\cdot130 = 980$ единиц. Значит затраты сырья S могут быть записаны в виде матрицы строки (730 980) и произведения: