выявить несоответствующую эталону закона Бенфорда частоту постоянного округления в большую или меньшую сторону.

Несмотря на широту применения закона Бенфорда нам не следует забывать о том, что существуют данные, не подчиняющиеся закону этому закону: почтовые индексы, выигрышные номера в лото и рулетку, номера телефонов и любые объемы данных, размер которых не достаточен для применения статистических методов.

Тем не менее, программа, созданная Нигрини, вполне справедливо основывается на законе Бенфорда. Эта работа совершила переворот в аудите, если раньше данные в декларациях возможно было проверить лишь выборочно, то на данный момент «Digital Analysis» позволяет осуществить проверку практически любого количества информации. Естественно, результаты таких проверок не всегда верны и могут приводить к ложным выводам, но нельзя отрицать, что они являются важными дополнительными уликами в делах, связанных с финансовыми махинациями или, к примеру, фальсификациями на выборах.

**Список литературы**

1. http://ru.wikipedia.org/wiki.
2. Журнал «Техника – молодежи». – 1979. – № 10. – С. 59.
3. Geophysical Research Letters. – 2010. – Vol. 37. – P. L22301–5.
4. doi:10.1029/2010GL044830.

## Y-ПРОСТЫЕ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МОДУЛИ

Ледяева А.С., Мамаев И.И.

*Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: alenochkalas@mail.ru*

**Определение.** Линейно упорядоченный правый унитарный модуль назовём *Y*-простым, если в нем нет нетривиальных выпуклых подмодулей.

**Теорема 1.** Линейно упорядоченный правый *R*-модуль М тогда и только тогда будет *Y*-простым, если для любой пары $a$, $b$ строго положительных элементов модуля можно указать такой строго положительный элемент $\alpha \in R$, что $a\alpha > b$.

Этот результат позволяет установить следующая теорема.

**Теорема 2.** Если а – строго положительный элемент линейно упорядоченного правого *R*-модуля М, то множество *К*, состоящее из всех таких элементов *X*, что при некотором строго положительном $a \in R$ будет минимально-выпуклым подмодулем, содержащим а.

Действительно, пусть $-a\beta \le x \le a\beta$ и $-a\gamma \le x \le a\gamma$ при некоторых строго положительных $\beta, \gamma \in R$ .

Следовательно, $-a(\beta + \gamma) \le x - y \le a(\beta + \gamma)$, то есть $x - y \in K$. Предположим, что если $\delta$ – строго положительный элемент из $R$ и $-a\beta \le x \le a\beta$, то $-a\beta\delta \le x\delta \le a\beta\delta$, то есть $x\delta \in K$ (что и требовалось доказать).

**Теорема 3.** Если линейно упорядоченный правый *R*-модуль М является *Y*-простым, то для всякой пары строго положительных элементов $\alpha, \beta \in R$ существует строго положительный элемент $\gamma \in R$, такой что $\alpha\gamma >$ .

Доказательство основывается на следующем предположении: пусть $\alpha$ и $\beta$ – строго положительные элементы из *R*. Если $a$ – строго положительный элемент, причем $a \in M$, то $a\alpha$ и $a\beta \in M$. В силу *Y*-простоты модуля для $a\alpha$ и $a\beta$ по теореме 1 найдется такое строго положительное $\gamma \in R$, что $(a\alpha)\gamma = a(\alpha\gamma) > \alpha\beta$. Следовательно, $\alpha\gamma > \beta$, то есть элемент, о коором говорится в теореме существует.

**Теорема 4**. Линейно упорядоченное кольцо *R* не содержит выпуклых правых идеалов тогда и только тогда, если для всякой пары строго положительных элементов $\alpha$, $\beta \in R$ существует строго положительный элемент $\gamma \in R$ такой, что $\alpha\gamma > \beta$ (1).

Действительно, пусть в кольце *R* выполнено условие (1). Рассмотрим это кольцо над самим собой как правый модуль. Как известно, в таком случае его подмодулями служат правые идеалы кольца [1]. На основании теоремы 1 этот модуль будет *Y*-простым, то есть по определению не содержит нетривиальных выпуклых подмодулей, а следовательно кольцо *R* не содержит выпуклых правых идеалов, отличных от 0 и *R*. Обратно, пусть кольцо не содержит нетривиальных выпуклых правых идеалов. Тогда рассматриваемый над самим собой как модуль он не содержит нетривиальных выпуклых подмодулей, то есть является модулем Y-простым, а по теореме 3 в кольце *R* выполняется условие (1).

*Следствие.* Y-простые линейно упорядоченные правые модули могут быть только над кольцами, лишенными нетривиальных выпуклых правых идеалов.

Необходимо отметить, что теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и в том случае, если вместо правых *Y*-простых модулей и правых выпуклых идеалов кольца рассматриваются левые *Y*-простые модули и левые выпуклые идеалы кольца.

**Теорема 5.** Пусть *M* линейно упорядоченный правый унитарный *Y*-простой модуль над архимедовым кольцом *R*, *R* не аннулирует модуль. Тогда *R* Y-изоморфно подкольцу *R* поля действительных чисел *D* и *M* *Y*-изоморфен аддитивной группе действительных чисел рассматриваемой как модуль над *R*.

Доказательство. На основании теоремы Пикерта-Хиона кольцо *R* *Y*-изоморфно однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел, взятому естественной упорядоченностью. Таким образом, можно считать, что *R* вложено в *D* [2; 3]. Покажем, что М не имеет собственных выпуклых подгрупп. Пусть С не нулевая подгруппа М. Возьмем $0 < c \in C$ и $0 < a \in M$. По теореме 1 существует положительный элемент $\alpha \in R$ такой, что $0 < a \in c\alpha$, но т.к. *R* обладает $1 \ne 0$ и $R \le D$, то всякое натуральное число содержится в *R*, и, следовательно, существует такое натуральное $n \in R$, что $\alpha < n$. Имеем $0 < \alpha < cd < cn \in C$. Таким образом, $C = M$, поэтому существует *Y*-изоморфизм группы (M, +) в группу (D, +). Следовательно, можно считать, что группа (M, +) является аддитивной подгруппой группы действительных чисел. Однако умножение элементов кольца операторов на элементы группы (M. +) может, вообще говоря, не совпадать с обычным умножением действительных чисел и, в отличие от последнего, мы будем обозначать его через $a{\cdot}\alpha$. Рассмотрим отображение $a \to a{\cdot}\alpha$, ($a \in M$, $\alpha \in R$) *M* в себя. Оно будет *Y*-изоморфизмом при строго положительном $\alpha$. Следует отметить, что если идеал *J* кольца *R* аннулирует элементы модуля, то он является выпуклым. Поскольку в кольце операторов *R* нет нетривиальных выпуклых идеалов, а также ввиду того, что *R* не аннулирует модуль, для каждого $\alpha > 0$ существует такое действительное число $r_\alpha > 0$, что $a\varphi 2 = a{\cdot}\alpha = ar_\alpha$ для всех $a \in M$, следовательно,

$$a{\cdot}(\alpha + \beta) = a{\cdot}\alpha + a{\cdot}\beta = ar_\alpha + ar_\beta = a(r_\alpha + r_\beta),$$

то есть

$$a\varphi_{\alpha+\beta} = a(r_\alpha + r_\beta);\ r_{\alpha+\beta} = r_\alpha + r_\beta;$$

$$a\varphi_{\alpha\beta} = a(\varphi_\alpha)\varphi_\beta = a(r_\alpha r_\beta),$$

то есть $r_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta$, тогда отображение $\alpha \to r_\alpha$ будет кольцевым $Y$-изоморфизмом $R$ на подкольцо поля действительных чисел. Из архимедовости кольца операторов $R$ φ является тождественным Y-автоморфизмом [4], то есть $\alpha \to r_\alpha$, откуда следует, что $a \cdot \alpha = a\alpha$, что и требовалось доказать.

**Список литературы**


1. Мамаев И.И. Абсолютная выпуклость пересечения всех относительно выпуклых подгрупп упорядочиваемой группы // IX Всероссийский коллоквиум по общей алгебре: резюме докл. – Гомель, 1968. – 97 с.
2. Копытов В.М., Мамаев И.И. Абсолютная выпуклость некоторых подгрупп упорядочиваемой группы // Алгебра и логика. – Новосибирск, 1968. – Т. 7. – № 2. – С. 20–26.
3. Кокорин А.И. Линейно упорядоченные группы: монография / А.И. Кокорин, В.М. Копытов. – М.: Наука, 1972. – 199 с.
4. Хион Я.В. Архимедовы упорядоченные кольца // Успехи математических наук. – 1954. – 9. – С. 237–242.


## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ ВИЗУАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ


Литвин Д.Б., Дроздова Е.А.

*Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: Litvin-372@yandex.ru*


При построении динамических математических моделей различных процессов и устройств широкое применение получают дифференциальные уравнения. При этом, сам процесс имитационного математического моделирования, исследования модели представляет собой, по сути, решение этих дифференциальных уравнений при различных начальных условиях, параметрах уравнения и вариациях правой части [1].

Весьма удобными инструментами для выполнения указанных исследований представляются современные математические пакеты, в которых реализован принцип так называемого визуального программирования. При использовании таких пакетов исследователь строит схему моделирования из стандартных блоков библиотеки, в которую включает источники сигналов, непосредственно исследуемую модель и средства отображения результатов моделирования. При этом, в отличие от классических способов моделирования, исследователю не нужно изучать язык программирования, используемые численные методы математики, а достаточно лишь общих умений работы на компьютере и, собственно, сути исследуемого процесса [3].

Система вычислений MATLAB и ее составляющая среда визуального моделирования Simulink по праву являются одними из наиболее распространенных пакетов для технических и математических вычислений, в которых реализован описанный принцип визуального программирования. В качестве примера рассмотрим решения весьма распространенного в различных областях знаний линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами следующего вида [2]:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = k\omega^2 x(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ – входной сигнал системы, как заданная функция времени; $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ – решение уравнения и его производные; $k$, $\omega$, $\xi$ – постоянные коэффициенты уравнения.

Исследование решений уравнения (1) в среде визуального моделирования Simulink системы MATLAB для различных входных воздействий выполним с использованием схемы моделирования, представленной на рис. 1. Центральное место на рассматриваемой схеме занимает собственно модель дифференциального уравнения в форме передаточной функции, которая получается применением к нему преобразования Лапласа

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}. \qquad (2)$$

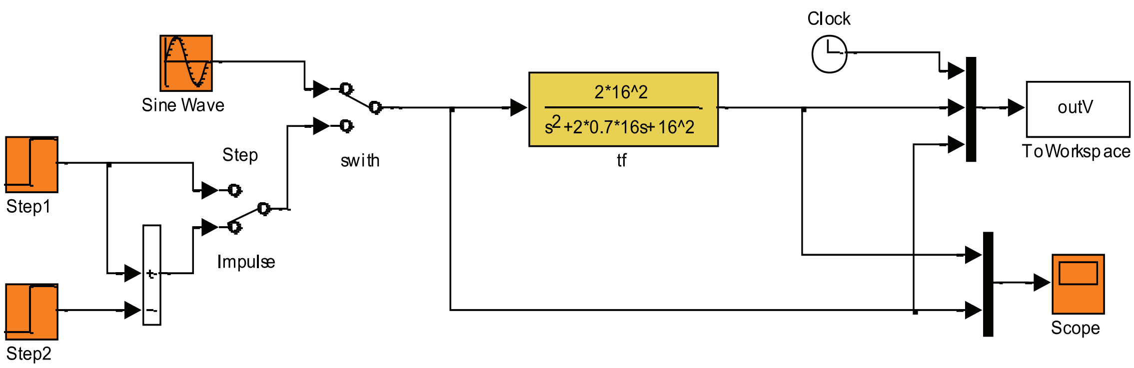


*Рис. 1. Схема моделирования*

Диалоговое окно, для ввода и изменения параметров уравнения имеет вид, показанный на рис. 2.

Левая часть схемы моделирования содержит переключаемые источники задающих воздействий, соответствующих различным правым частям уравнения . В частности представлены источники ступенчатого, импульсного и гармонического воздействий, параметры которых также легко редактируются.

Процесс решения уравнения сводится к запуску моделирования и просмотру его результатов на своеобразном экране (Scope). На рис. 3 приведены результаты моделирования уравнения для значений параметров, указанных на рис. 1 для импульсного воздействия.

Таким образом, визуализация решений дифференциальных уравнений в среде визуального моделирования Simulink системы MATLAB делает процесс исследования математических моделей на их основе предельно простым и наглядным.