да таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т цемента в день.

Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x,$$

а удельные затраты составят:

$$K/x = -x^2 + 98x + 200 .$$

Решение: Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^2 + 98x + 200$ на промежутке [20; 90].

Выведем $x = 49$ – критическая точка функции. Найдем значение функции на концах и в критической точке: $f(20) = 1760$; $f(49) = 2601$; $f(90) = 320$.

Итак, при выпуске 49 т цемента в день удельные издержки максимальны (т.е экономически это не выгодно), а при выпуске 90 т в день удельные издержки минимальны, значит заводу можно работать на предельной мощности и ещё более усовершенствовать свои технологии, поскольку дальше начнет действовать закон убывающей доходности и без нововведений выпуск продуции не может быть увеличен.

На мой взгляд, производная является важнейшим инструментом экономического анализа, который позволяет углубить математический смысл экономических понятий и выразить экономические законы с помощью математических формул. Экономический смысл производной состоит в том, что она выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору. Многие законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем.

Список литературы

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. – М.: Юнити-М, 2009.
2. Иванов С.И. Экономика. Основы экономической теории. – М.: Вита-Пресс, 1999.
3. Малыхин В.Л. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 1999.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_функции.

ЗАКОН БЕНФОРДА: СУЩНОСТЬ И ПРИМЕНЕНИЕ

Кувакина Л.В., Долгополова А.Ф.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: lankasipova@mail.ru

В 1881 году американский астроном Саймон Ньюкомб обратил внимание на то, что в книгах, содержащих логарифмические таблицы, гораздо сильнее истерты те страницы, которые содержат логарифмы чисел, начинающихся с единицы, а страницы с числами, начинающимися на 9 – почти новые. Хотя, распределение цифр должны были бы встречаться примерно одинаковое количество раз. Тогда, астроном предположил, что разброс цифр на самом деле соответствует логарифмическому распределению: единица – около 30 % случаев, 2 – примерно 18 % и так далее, до 9–5 % случаев.

Заново, в 1938 году, это явление обнаружил американский физик Фрэнк Бенфорд. Его изучение было более детально: в общем он проанализировал 20 таблиц, которые содержали данные о площади бассейна 335 рек, удельной теплоёмкости и молекулярном весе тысяч химических соединений, номерах домов 342 улиц. Это доскональное изучение выявило, что единица является первой значащей цифрой с вероятностью не 1/9, как следовало ожидать, а около 1, как следовало ожидать, а около 1/3.

Таким образом, закон Бенфорда или закон первой цифры гласит, что в таблицах чисел, основанных на данных источников из реальной жизни цифра 1 на первом месте встречается гораздо чаще, чем все остальные (приблизительно в 30 % случаях), а также вероятность того, что цифра будет стоять на первом месте в числе тем больше, чем меньше цифра.

Перенося закона Бенфорда в реальную жизнь его можно объяснить так: в мире маленьких вещей всегда больше, чем больших: маленьких водоемов больше чем больших, маленькие камни встречаются чаще, чем большие валуны, серьезные аварии случаются реже, чем незначительные. В итоге, после всех исследований Бенфорд не только сформулировал закон преобладания единицы, но и вывел формулы, которые позволяют рассчитать частоту появления каждой цифры в начале числа в том или ином числовом массиве.

Закон обнаруженный Бенфордом выглядит так: если у нас основание системы счисления b ($b > 2$), то для цифры d ($d \in \{1, \dots, b-1\}$) вероятность быть первой значащей цифрой составляет

$$P(d) = \log_b (d+1) - \log_b(d) = \log_b(1 + 1/d).$$

Это в точности расстояние между d и $d + 1$ на логарифмической шкале.

Для равномерного распределения, если вы имеете цифры 1, 2, 3, 4 ,5 ,6 ,7, 8, 9, 0 (= 10), то у вас есть 10 отрезков (от 0 до 1,…, от 8 до 9, от 9 до 10). Обратите внимание, все отрезки лежат в отрезке [0, 10]. Для отрезка $[d, d+1]$ равномерное распределение должно быть пропорционально его длине, то есть длине отрезка $[d, d+1]$, то есть $(d+1) - d$, поделённое на длину отрезка [0, 10], которая равна 10.

$$((d+1) - d)/(10 - 0) = 1/10.$$

Если *логарифмы* непрерывно распределены, необходимо взять логарифм числа перед тем, как рассмотреть отрезки. Для логарифмов рассматриваем отрезки от 1 до 10 (т.к. $\log_{10}0$ не имеет смысла). В этом случае вы будете иметь интервалы от $\log_{10}1$ до $\log_{10}2$,…, от $\log_{10}8$ до $\log_{10}9$, от $\log_{10}9$ до $\log_{10}10$. Все отрезки лежат в интервале $[\log_{10}1, \log_{10}10] = [0, 1]$. Длина последнего равна 1. Итак, рассматриваем отрезок $[d, d+1]$ на обычной шкале, в *логарифмической* шкале равномерное распределение будет пропорционально его длине, то есть:

$$(\log_{10}(d+1) - \log_{10}(d))/1 - j + \log_{10}(d+1).$$

В таблице представлены найденные Бенфордом значения вероятностей для десятичной системы счисления. При этом распределение зависит только от системы счисления, но не от единицы измерения. Другими словами, если тонны перевести в фунты, а квадратные километры – в акры, распределение не изменится.

Долгое время математики сомневались в справедливости закона Бенфорда. Во многом это объяснялось приверженностью к неподкупным законам теории вероятности, для которой все цифры одинаковы. Но сторонники Бенфорда утверждали, что впри подсчете необходимо обращаться не к математической абстракции, а к конкретным примерам реальной жизни.

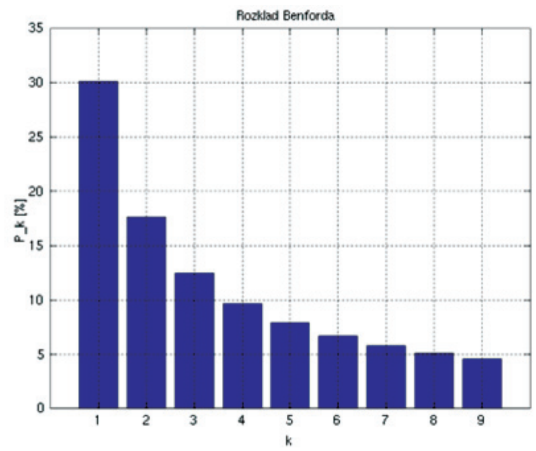

Таблица «Распределение Бенфорда»

По горизонтали – первые значащие цифры, по вертикали – вероятность их появления

Значения вероятностей
для десятичной системы счисления

d	*p*
1	30,1%
2	17,6%
3	12,5%
4	9,7%
5	7,9%
6	6,7%
7	5,8%
8	5,1%
9	4,6%

Полагаясь на такую точку зрения, закон Бенфорда можно рассмотреть на следующем примере. Представим, что вносим в банк 1000$, под 10% годовых. В следующем году вклад вырастет на 10% и будет составлять уже 1100$, еще через год на счету будет уже 1210$, затем 1331$ и так далее. Единица остается первой цифрой нашего баланса на счете в течение долгого времени. Когда счет будет составлять 2000$, двойка первой цифрой будет оставаться уже в течении более короткого периода. Когда депозит составит 9000$, 10-процентный рост приведет к росту суммы вклада свыше 10000$, и единица снова долгое время будет оставаться первой цифрой. Таким образом, эти изменения чисел подчиняются закону Бенфорда: все, что растет в числе, размере, весе или цене дольше всего остается в «области единицы».

В нашей жизни мы постоянно сталкиваемся с данными, соответствующими закону Бенфорда: номера платежных поручений от различных покупателей, номера домов в адресах клиентов, суммы платежей покупателей, остатки товаров на складах, суммы в авансовых отчетах.

В 1986 году физик Дон Лемонс вновь обратил внимание на то, что все на планете подчиняется закону Бенфорда.

Не так давно интернациональная группа ученых рассмотрела то, как подчиняются закону Бенфорда различные природные процессы: продолжительность времени между геомагнитными инверсиями, выбросы парниковых газов, число инфекционных заболеваний. На данный момент, наиболее полно исследована возможность применения закона Бенфорда в геофизике. Исследования проводились в Перу и Канберре. В Перу ученые обнаружили, что незначительное вертикальное смещение поверхности земли не удовлетворяет закону Бенфорда, но сдвиги, вызванные мощными землетрясениями, напротив соответствуют закону. Ситуация с сейсмической активностью в Канберре была аналогичной, лишь несколько отличалась степень соответствия закону во времени. Эти исследования, по мнению математика Теодора Хилла, не принимавшего участия в работе, будут иметь огромное значение в будущем, так как с помощью закона Бенфорда станут отбирать модели физических процессов.

Но даже раньше, чем в геофизике, закон Бенфорда стали применять для проверки финансовой отчетности на предмет фальсификации. В конце 20 века американский математик Марк Нигрини пришел к выводу, что подчиняться закону Бенфорда должны и цифры в налоговых декларациях, соответственно несовпадение с законом первой цифры указывает на подтасовку данных. Разрабатывая эту теорию, Нигрини проанализировал более 200000 налоговых деклараций и опытным путем доказал, что почти в каждое третье число в аутентичных отчетах начинается с единицы. На основании этих данных математик разработал программу для проверки числовых массивов на соответствие закону Бенфорда. В 1995 году эта программа была протестирована. В ходе этого испытания Нью-йоркская налоговая полиция разоблачила семерых мошенничающих налогоплательщиков. Данная программа получила название «Digital Analysis» (сейчас особенно активно использует эту программу мировая компания «Ernst & Young»). На данный момент известно около десяти тестов «Digital Analysis». Наиболее распространены из них следующие шесть.

1. Анализ частоты первой цифры. В данном случае используется непосредственно сам закон Бенфорда.

2. Анализ частоты первой и второй цифры. При использовании данного теста отдельно проверяется частота цифры от 1 до 9 на первой позиции и частота цифры от 0 до 9 на второй. Затем составляется таблица соответствий, которая анализируется на отличие частоты цифр в приведенной последовательности от эталонной последовательности Бенфорда.

3. Анализ дублей. Данный метод опирается только на методологию Бенфорда, а не на сам закон. Данная проверка выявляет частоту числовых повторов в большом количестве документации. Все повторяющиеся числа в исследуемых данных сортируются по читстоте повторов, а затем проверяются уплотнения повторов ряда чисел. Наиболее часто анализ дублей используют для налоговых проверок, при внутренних расследованиях и внешнем аудите.

4. Анализ первой пары цифр. Этот метод фактически представляет собой усовершенствованный второй тест, так как он исследует частоту появления цифр в начале числа не от 1 до 9, а от 10 до 99. Наиболее удобно использовать этот метод в его графической интерпретации.

5. Анализ первой тройки цифр. Метод, более точный в сравнении с первым, вторым и четвертым тестами. Программа анализирует частоту первой тройки цифр от 100 до 999 в изучаемой числовой последовательности. Данный метод используют при проверке большого объема информации (от 10000 значений).

6. Анализ округлений. Тест проводится для проверки частоты последних значащих цифр анализируемой числовой последовательности. Тест позволяет

выявить несоответствующую эталону закона Бенфорда частоту постоянного округления в большую или меньшую сторону.

Несмотря на широту применения закона Бенфорда нам не следует забывать о том, что существуют данные, не подчиняющиеся закону этому закону: почтовые индексы, выигрышные номера в лото и рулетку, номера телефонов и любые объемы данных, размер которых не достаточен для применения статистических методов.

Тем не менее, программа, созданная Нигрини, вполне справедливо основывается на законе Бенфорда. Эта работа совершила переворот в аудите, если раньше данные в декларациях возможно было проверить лишь выборочно, то на данный момент «Digital Analysis» позволяет осуществить проверку практически любого количества информации. Естественно, результаты таких проверок не всегда верны и могут приводить к ложным выводам, но нельзя отрицать, что они являются важными дополнительными уликами в делах, связанных с финансовыми махинациями или, к примеру, фальсификациями на выборах.

Список литературы

1. http://ru.wikipedia.org/wiki.
2. Журнал «Техника – молодежи». – 1979. – № 10. – С. 59.
3. Geophysical Research Letters. – 2010. – Vol. 37. – P. L22301–5.
4. doi:10.1029/2010GL044830.

Y-ПРОСТЫЕ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МОДУЛИ

Ледяева А.С., Мамаев И.И.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: alenochkalas@mail.ru

Определение. Линейно упорядоченный правый унитарный модуль назовём *Y*-простым, если в нем нет нетривиальных выпуклых подмодулей.

Теорема 1. Линейно упорядоченный правый *R*-модуль M тогда и только тогда будет *Y*-простым, если для любой пары a, b строго положительных элементов модуля можно указать такой строго положительный элемент $\alpha \in R$, что $a\alpha > b$.

Этот результат позволяет установить следующая теорема.

Теорема 2. Если a – строго положительный элемент линейно упорядоченного правого *R*-модуля M, то множество *К*, состоящее из всех таких элементов *X*, что при некотором строго положительном $a \in R$ будет минимально-выпуклым подмодулем, содержащим a.

Действительно, пусть $-a\beta \le x \le a\beta$ и $-a\gamma \le x \le a\gamma$ при некоторых строго положительных $\beta, \gamma \in R$.

Следовательно, $-a(\beta + \gamma) \le x - y \le a(\beta + \gamma)$, то есть $x - y \in K$. Предположим, что если δ – строго положительный элемент из R и $-a\beta \le x \le a\beta$, то $-a\beta\delta \le x\delta \le a\beta\delta$, то есть $x\delta \in K$ (что и требовалось доказать).

Теорема 3. Если линейно упорядоченный правый *R*-модуль M является *Y*-простым, то для всякой пары строго положительных элементов $\alpha, \beta \in R$ существует строго положительный элемент $\gamma \in R$, такой что $\alpha\gamma >$.

Доказательство основывается на следующем предположении: пусть α и β – строго положительные элементы из R. Если a – строго положительный элемент, причем $a \in M$, то $a\alpha$ и $a\beta \in M$. В силу *Y*-простоты модуля для $a\alpha$ и $a\beta$ по теореме 1 найдется такое строго положительное $\gamma \in R$, что $(a\alpha)\gamma = a(\alpha\gamma) > \alpha\beta$. Следовательно, $\alpha\gamma > \beta$, то есть элемент, о кооом говорится в теореме существует.

Теорема 4. Линейно упорядоченное кольцо R не содержит выпуклых правых идеалов тогда и только тогда, если для всякой пары строго положительных элементов α, $\beta \in R$ существует строго положительный элемент $\gamma \in R$ такой, что $\alpha\gamma > \beta$ (1).

Действительно, пусть в кольце R выполнено условие (1). Рассмотрим это кольцо над самим собой как правый модуль. Как известно, в таком случае его подмодулями служат правые идеалы кольца [1]. На основании теоремы 1 этот модуль будет *Y*-простым, то есть по определению не содержит нетривиальных выпуклых подмодулей, а следовательно кольцо R не содержит выпуклых правых идеалов, отличных от 0 и R. Обратно, пусть кольцо не содержит нетривиальных выпуклых правых идеалов. Тогда рассматриваемый над самим собой как модуль он не содержит нетривиальных выпуклых подмодулей, то есть является модулем Y-простым, а по теореме 3 в кольце R выполняется условие (1).

Следствие. Y-простые линейно упорядоченные правые модули могут быть только над кольцами, лишенными нетривиальных выпуклых правых идеалов.

Необходимо отметить, что теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и в том случае, если вместо правых *Y*-простых модулей и правых выпуклых идеалов кольца рассматриваются левые *Y*-простые модули и левые выпуклые идеалы кольца.

Теорема 5. Пусть M линейно упорядоченный правый унитарный *Y*-простой модуль над архимедовым кольцом R, R не аннулирует модуль. Тогда R Y-изоморфно подкольцу R поля действительных чисел D и M *Y*-изоморфен аддитивной группе действительных чисел рассматриваемой как модуль над R.

Доказательство. На основании теоремы Пикерта-Хиона кольцо R *Y*-изоморфно однозначно определенному подкольцу поля действительных чисел, взятому естественной упорядоченностью. Таким образом, можно считать, что R вложено в D [2; 3]. Покажем, что M не имеет собственных выпуклых подгрупп. Пусть C не нулевая подгруппа M. Возьмем $0 < c \in C$ и $0 < a \in M$. По теореме 1 существует положительный элемент $\alpha \in R$ такой, что $0 < a \in c\alpha$, но т.к. R обладает $1 \ne 0$ и $R \le D$, то всякое натуральное число содержится в R, и, следовательно, существует такое натуральное $n \in R$, что $\alpha < n$. Имеем $0 < \alpha < cd < cn \in C$. Таким образом, $C = M$, поэтому существует *Y*-изоморфизм группы (M, +) в группу (D, +). Следовательно, можно считать, что группа (M, +) является аддитивной подгруппой группы действительных чисел. Однако умножение элементов кольца операторов на элементы группы (M. +) может, вообще говоря, не совпадать с обычным умножением действительных чисел и, в отличие от последнего, мы будем обозначать его через $a{\cdot}\alpha$. Рассмотрим отображение $a \to a{\cdot}\alpha$, $(a \in M, \alpha \in R)$ M в себя. Оно будет *Y*-изоморфизмом при строго положительном α. Следует отметить, что если идеал J кольца R аннулирует элементы модуля, то он является выпуклым. Поскольку в кольце операторов R нет нетривиальных выпуклых идеалов, а также ввиду того, что R не аннулирует модуль, для каждого $\alpha > 0$ существует такое действительное число $r_\alpha > 0$, что $a\varphi 2 = a{\cdot}\alpha = ar_\alpha$ для всех $a \in M$, следовательно,

$$a{\cdot}(\alpha + \beta) = a{\cdot}\alpha + a{\cdot}\beta = ar_\alpha + ar_\beta = a(r_\alpha + r_\beta),$$

то есть

$$a\varphi_{\alpha+\beta} = a(r_\alpha + r_\beta);\ r_{\alpha+\beta} = r_\alpha + r_\beta;$$

$$a\varphi_{\alpha\beta} = a(\varphi_\alpha)\varphi_\beta = a(r_\alpha r_\beta),$$