t	Y_t	Y_{t-2}	$Y_t - \overline{Y_3}$	$Y_{t-2} - \overline{Y_4}$	$(Y_t - Y_3)\times$ $\times(Y_{t-2} - Y_4)$	$(Y_t - \overline{Y_3})^2$	$(Y_{t-2} - \overline{Y_4})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	375	–	–	–	–	–	–
2	371	–	–	–	–	–	–
3	869	375	145,57	–269,79	–39273,33	21190,62	72786,64
4	1015	371	291,57	–273,79	–79828,95	85013,06	74960,96
5	357	869	–366,43	224,21	–82157,27	134270,94	50270,12
6	471	1015	–252,43	370,21	–93452,11	63720,90	137055,44
7	992	357	268,57	–287,79	–77291,76	72129,84	82823,08
8	1020	471	296,57	–173,79	–51540,90	87953,76	30202,96
9	390	992	–333,43	347,21	–115770,23	111175,56	120554,78
10	355	1020	–368,43	375,21	–138238,62	135740,66	140782,54
11	992	390	268,57	–254,79	–68428,95	72129,84	64917,94
12	905	355	181,57	–289,79	–52617,17	32967,66	83978,24
13	461	992	–262,43	347,21	–91118,32	68869,50	120554,78
14	454	905	–269,43	260,21	–70108,38	72592,52	67709,24
15	920	461	196,57	–183,79	–36127,60	38639,76	33778,76
16	927	454	203,57	–190,79	–38839,12	41440,74	36400,82
Сумма	10128	9027	–0,02	–0,06	–1034792,71	1037835,43	1116776,36
Среднее значение	723,43	644,79	–	–	–	–	–

Итак, коэффициент автокорреляции второго порядка рассчитывается по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \overline{y}_3)(y_{t-2} - \overline{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \overline{y}_3)^2 \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \overline{y}_4)^2}},$$

где $\overline{y}_3 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_t$; $\overline{y}_4 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}$.

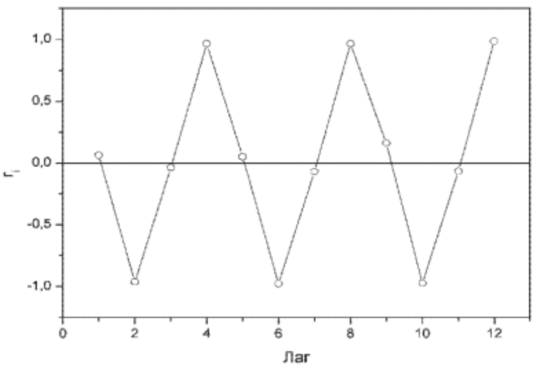
Итак,

$$r_2 = \frac{-1034792{,}71}{\sqrt{1037835{,}43 \cdot 1116776{,}36}} = -0{,}961183.$$

Аналогично находим коэффициенты автокорреляции более высоких порядков, а все полученные значения заносим в сводную таблицу.

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней
1	0,063294
2	–0,961183
3	–0,036290
4	0,964735
5	0,050594
6	–0,976516
7	–0,069444
8	0,964629
9	0,162064
10	–0,972918
11	–0,065323
12	0,985761

Коррелограмма:



Анализ коррелограммы и графика исходных уровней временного ряда позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала.

Список литературы

1. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс. Акад. нар. хоз-ва при Правительстве Рос. Федерации. – М.: Дело,1997. – 245 с.: ил. Библиогр.: с. 242-243. ISBN 5-7749-0053-3.

2. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 402 с.: ил.-(Университетский учебник). Библиогр.: С. 384-386. ISBN 5-86225-458-7; 0-19-50346-4.

РОЛЬ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ

Кочержова Е.Н., Боташева Л.Р., Цыплакова О.Н.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: alena.kocherzhova.94@mail.ru

Ф. Энгельс заметил, что лишь дифференциальное исчисление дает возможность математически изображать процессы, движение. Поэтому целью данной работы является выяснить роль производной в экономике.

Производная является основным понятием дифференциального исчисления, которая характеризует скорость изменения функции. Производной функции $y = f(x)$в точке x_0 называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, когда $\Delta x \to 0$. Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой. Производная обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Определение производной выражается с помощью формулы:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

На вопрос «что такое производная?» экономист ответит: «Маржинализм».

«Marginal» в переводе с английского означает «предельный». Предельными величинами в экономике являются: предельный доход, предельные издержки, предельная полезность, предельная производительность труда. Они характеризуют не состояние, а процесс, т.е. изменение экономического объекта. Поэтому производная показывает скорость изменения некоторого экономического объекта или процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору.

Пусть q – выпуск произведенной продукции, $TC(q)$ – соответствующие данному выпуску издержки производства (total costs), Δq – прирост продукции, а DTC – прирост издержек произодства.

Предельные издержки MC (marginal costs) показывают дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции:

$$MC = TC(q + \Delta q) - TC(q),$$

где $\Delta q = 1$

Так как $\Delta TC \approx dTC$, то получим $MC = \Delta TC \approx dTC = TC'(q)\Delta q = TC'(q)$.

Подпредельным (маржинальным) значением показателя в экономическом анализе понимают производную функции этого показателя.

Для исследования процессов в экономике применяют понятие эластичности функции ($E_{x,y}$), которое показывает предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x, при $\Delta x \to 0$:

$$E_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Эластичность функции – это изменение одного показателя x по отношению к изменению другого показателя y, от которого зависит первый. Она показывает процентное изменение одной переменной в результате изменения другой на 1 %.

Существует несколько видов эластичности:

– Эластичность спроса по цене (прямая):

$$E_p^D = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{q'(p) \cdot \Delta p}{p' \cdot \Delta p} \cdot \frac{p}{q} = q'(p) \cdot \frac{p}{q},$$

она показывает процентное изменение величины спроса на какое-либо благо при изменении его цены на 1 % и характеризует реакцию потребителей на изменение цен на продукцию.

Если $E_p^D > 1$, то спрос является эластичным (или относительно эластичным). Объём спроса изменяется на больший процент, чем цена.

Если $E_p^D < 1$, то спрос называется неэластичным. Объем спроса меняется на меньший процент, чем цена.

Если $E_p^D = 1$, то говорят, что товар имеет единичную эластичность и изменение цены вызывает абсолютно пропорциональное изменение объема спроса.

Если $E_p^D = 0$, то спрос на данный товар называется абсолютно неэластичным. Объем спроса не меняется при изменении цены и остается постоянным при любом её изменении.

Если $E_p^D = \infty$, то спрос называется абсолютно эластичным. Объем спроса неограничен при падении цены ниже определенного уровня.

– Эластичность спроса по доходу:

$$E_I^D = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q} = \frac{q'(I) \cdot \Delta I}{I' \cdot \Delta I} \frac{I}{q} = q'(I) \cdot \frac{I}{q},$$

характеризует относительное процентное изменение величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителя на 1 %. Положительная эластичность определяет качественные товары, а отрицательная – некачественные.

– Ценовая эластичность ресурсов:

$$E_P(R) = \left(\frac{dR}{R}\right) \Big/ \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = \frac{R'(p) \cdot \Delta p}{p' \cdot \Delta p} \frac{p}{R} = R'(p) \cdot \frac{p}{R},$$

показывает относительное изменение величины спроса на какой-либо ресурс, например, труд, при изменении его цены на 1 %.

Производную используют при решении экономических задач:

Задача № 1. Пусть функция спроса имеет вид $QD = 100 - 20p$, постоянные издержки TFC (total fixed costs) составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC (total variable costs) на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

Решение: Рассчитаем прибыль:

$$\Pi = TR - TC,$$

где $TR = pQ$; $TC = TFC + TVC$.

Цена единицы продукции:

$$20p = 100 - Q \Rightarrow p = 5 - Q/20,$$

тогда

$$\Pi = (5 - Q/20)Q - (50 + 2Q) =$$

$$= -2Q + 60Q - 1000 \to \max$$

Значит объём выпуска $\Pi'(Q) = -2Q + 60$ достигнет максимума при равенстве нулю производной по цене:

$$-2Q + 60 = 0 \Rightarrow Q = 30.$$

Задача № 2. Цементный завод производит X т цемента в день. По договору он должен

ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т цемента в день.

Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x,$$

а удельные затраты составят:

$$K/x = -x^2 + 98x + 200 \; .$$

Решение: Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^2 + 98x + 200$ на промежутке [20; 90].

Выведем $x = 49$ – критическая точка функции. Найдем значение функции на концах и в критической точке: $f(20) = 1760$; $f(49) = 2601$; $f(90) = 320$.

Итак, при выпуске 49 т цемента в день удельные издержки максимальны (т.е экономически это не выгодно), а при выпуске 90 т в день удельные издержки минимальны, значит заводу можно работать на предельной мощности и ещё более усовершенствовать свои технологии, поскольку дальше начнет действовать закон убывающей доходности и без нововведений выпуск продуции не может быть увеличен.

На мой взгляд, производная является важнейшим инструментом экономического анализа, который позволяет углубить математический смысл экономических понятий и выразить экономические законы с помощью математических формул. Экономический смысл производной состоит в том, что она выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору. Многие законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем.

Список литературы

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов. – М.: Юнити-М, 2009.
2. Иванов С.И. Экономика. Основы экономической теории. – М.: Вита-Пресс, 1999.
3. Малыхин В.Л. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 1999.
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_функции.

ЗАКОН БЕНФОРДА: СУЩНОСТЬ И ПРИМЕНЕНИЕ

Кувакина Л.В., Долгополова А.Ф.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: lankasipova@mail.ru

В 1881 году американский астроном Саймон Ньюкомб обратил внимание на то, что в книгах, содержащих логарифмические таблицы, гораздо сильнее истерты те страницы, которые содержат логарифмы чисел, начинающихся с единицы, а страницы с числами, начинающимися на 9 – почти новые. Хотя, распределение цифр должны были бы встречаться примерно одинаковое количество раз. Тогда, астроном предположил, что разброс цифр на самом деле соответствует логарифмическому распределению: единица – около 30 % случаев, 2 – примерно 18 % и так далее, до 9–5 % случаев.

Заново, в 1938 году, это явление обнаружил американский физик Фрэнк Бенфорд. Его изучение было более детально: в общем он проанализировал 20 таблиц, которые содержали данные о площади бассейна 335 рек, удельной теплоёмкости и молекулярном весе тысяч химических соединений, номерах домов 342 улиц. Это доскональное изучение выявило, что единица является первой значащей цифрой с вероятностью не 1/9, как следовало ожидать, а около 1, как следовало ожидать, а около 1/3.

Таким образом, закон Бенфорда или закон первой цифры гласит, что в таблицах чисел, основанных на данных источников из реальной жизни цифра 1 на первом месте встречается гораздо чаще, чем все остальные (приблизительно в 30 % случаях), а также вероятность того, что цифра будет стоять на первом месте в числе тем больше, чем меньше цифра.

Переноса закона Бенфорда в реальную жизнь его можно объяснить так: в мире маленьких вещей всегда больше, чем больших: маленьких водоемов больше чем больших, маленькие камни встречаются чаще, чем большие валуны, серьезные аварии случаются реже, чем незначительные. В итоге, после всех исследований Бенфорд не только сформулировал закон преобладания единицы, но и вывел формулы, которые позволяют рассчитать частоту появления каждой цифры в начале числа в том или ином числовом массиве.

Закон обнаруженный Бенфордом выглядит так: если у нас основание системы счисления b ($b > 2$), то для цифры d ($d \in \{1, \ldots, b - 1\}$) вероятность быть первой значащей цифрой составляет

$$P(d) = \log_b (d + 1) - \log_b(d) = \log_b(1 + 1/d).$$

Это в точности расстояние между d и $d + 1$ на логарифмической шкале.

Для равномерного распределения, если вы имеете цифры 1, 2, 3, 4 ,5 ,6 ,7, 8, 9, 0 (= 10), то у вас есть 10 отрезков (от 0 до 1,…, от 8 до 9, от 9 до 10). Обратите внимание, все отрезки лежат в отрезке [0, 10]. Для отрезка $[d, d + 1]$ равномерное распределение должно быть пропорционально его длине, то есть длине отрезка $[d, d + 1]$, то есть $(d + 1) - d$, поделённое на длину отрезка [0, 10], которая равна 10.

$$((d + 1) - d)/(10 - 0) = 1/10.$$

Если *логарифмы* непрерывно распределены, необходимо взять логарифм числа перед тем, как рассмотреть отрезки. Для логарифмов рассматриваем отрезки от 1 до 10 (т.к. $\log_{10}0$ не имеет смысла). В этом случае вы будете иметь интервалы от $\log_{10}1$ до $\log_{10}2$,…, от $\log_{10}8$ до $\log_{10}9$, от $\log_{10}9$ до $\log_{10}10$. Все отрезки лежат в интервале $[\log_{10}1, \log_{10}10] = [0, 1]$. Длина последнего равна 1. Итак, рассматриваем отрезок $[d, d + 1]$ на обычной шкале, в *логарифмической* шкале равномерное распределение будет пропорционально его длине, то есть:

$$(\log_{10}(d + 1) - \log_{10}(d))/1 - j + \log_{10}(d + 1).$$

В таблице представлены найденные Бенфордом значения вероятностей для десятичной системы счисления. При этом распределение зависит только от системы счисления, но не от единицы измерения. Другими словами, если тонны перевести в фунты, а квадратные километры – в акры, распределение не изменится.

Долгое время математики сомневались в справедливости закона Бенфорда. Во многом это объяснялось приверженностью к неподкупным законам теории вероятности, для которой все цифры одинаковы. Но сторонники Бенфорда утверждали, что впри подсчете необходимо обращаться не к математической абстракции, а к конкретным примерам реальной жизни.