ГОМОМОРФИЗМЫ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МОДУЛЕЙ

Жерздева И.С., Мамаев И.И.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: Zherzdeva.irina@mail.ru

В работе рассматриваются правые унитарные частично упорядоченные модули над линейно упорядоченными кольцами без делителей нуля.

Определение 1. R-модуль M называется частично упорядоченным, если:

1) M частично упорядочен как абелева группа,

2) для каждого неотрицательного $a \in M$ и не отрицательного $\alpha \in R$ будет $a\alpha$ неотрицательным.

Как и в теории частично упорядоченных групп, при изучении частичных порядков R-модулей важным инструментом является понятие положительного конуса. Элемент $a \in M$ называется положительным если $a \geq 0$, строго положительным, если $a > 0$. Множество $P = P(M) = M^+$ положительных элементов из M называется положительным конусом R-модуля M. Легко проверить, что:

Теорема 1. Подгруппа P группы $(M, +)$ тогда и только тогда служит положительным конусом R-модуля M при его некоторой частичной упорядоченности, если:

1) $0 \in P$.

2) Если $a \in P$, и $-a \in P$, то $a = 0$.

3) Если α неотрицательный элемент кольца R и $a \in P$, то $a\alpha \in P$.

Теорема 2. Подполугруппа P группы $(M, +)$ тогда и только тогда служит положительным конусом R-модуля, если помимо условий 1-3 теоремы 1 она удовлетворяет также условию 4: для всякого a Î M либо $a \in P$, либо $-a \in P$.

Определение 2. Отображение φ будем называть Y–гомоморфизмом , если оно является гомоморфизмом модулей и , сверх того, изотонно , то есть $a \leq b$ влечет за собой $a' \leq b'$, где $a' = a\varphi$, $b' = b\varphi$. Если Y-гомоморфное отображение взаимно однозначно, то будем говорить об Y-гомоморфизме.

Определение 3. Модуль A частично упорядоченного R-модуля M называется выпуклым, если со всякими своими сравнимыми элементами a, b $(a < b)$ он содержит и все элементы x, такие что $a \leq x \leq b$.

Далее рассмотрим следующие свойства Y-гомоморфизмов.

Свойство 1. Ядро N Y-гомоморфизма частично упорядоченного R-модуля M на частично упорядоченный R-модуль M' является выпуклым подмодулем модуля M.

В самом деле, известно, что N подмодуль. Пусть $a \in N$, $a \geq 0$ и $x \in M$, $0 \leq x \leq a$. Так как $x \geq 0$, то по определению Y-гомоморфизма

$$\varphi,\ x\varphi \geq 0\varphi, \tag{1}$$

Но $a - x \geq 0$ и $a\varphi = 0$, тогда:

$$0' \leq (a - x)\varphi = (a\varphi) + (-x\varphi) = -x\varphi. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $x\varphi = 0'$, то есть $x \in N$.

Если $a \leq x \leq b$, a и $b \in N$, то в силу эквивалентности неравенства $a \leq x \leq b$ и $0 \leq x - a \leq b - a$, получаем выпуклость N [2].

Свойства 2. Если N выпуклый подмодуль R-подмодуль M, то фактор- модуль M/N можно так частично упорядочить , что естественное гомоморфное отображение M/N будет Y-гомоморфизмом. С другой стороны, если частично упорядоченный R-модуль M гомоморфно отображается на частично упорядоченный R-модуль M' то $M' \cong M/N$, где N ядро рассматриваемого гомоморфизма.

Для доказательства первой части свойства 2 берется положительный конус P R-модуля M, P' – совокупность смежных классов по N, содержащих хотя бы по одному элементу из P. Проверка условий 1-3 теоремы 1 для P' является положительным конусом в M/N. Для доказательства второй части свойства пусть φ: $M \approx M'$, N – ядро φ гомоморфизма φ^*, действующий по правилу $(a + N)\varphi^* = a\varphi$, является изоморфизмом M/N и M'. Если $a + N \geq 0$, то существует элемент $a_1 + N$ такой, что $a_1 \geq 0$. Тогда $(a + N)\varphi^* = a\ \varphi = a_1$, $\varphi \geq 0$.

Свойства 3. Произвольный Y – гомоморфизм φ: $M \to M'$ одного частично упорядоченного модуля на другой устанавливает взаимно однозначное соответствие между подмодулями L модуля M, содержащими ядро этого гомоморфизма и подмодулями L' модуля M'. Причем, если N' – выпуклый подмодуль в M', соответствующий N, то $M/N \cong M'/N'$ (доказывается аналогично свойству 2).

Таким образом, вторая теорема Дедекинда-Нетер об изоморфизме переносится на частично упорядоченные модули, в то время как первая теорема Дедекинда-Нетер об изоморфизме не имеет места для частично упорядоченных Z-модулей [1].

Список литературы

1. Кокорин А.И. Линейно упорядоченные группы: монография / А.И. Кокорин, В.М. Копытов. – М.: Наука,1972. – 199 с.

2. Копытов В.М., Мамаев И.И. Абсолютная выпуклость некоторых подгрупп упорядочиваемой группы // Алгебра и логика. – Новосибирск, 1968. – Т.7. – № 2. – С. 20–26.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Иващенко Е.В., Богомольский С.А.

ФГБОУ ВПО «Армавирская государственная педагогическая академия», Армавир, e-mail: ivachenko_evgenia@mail.ru

Современный экономист должен хорошо владеть количественными методами анализа. К такому выводу нетрудно прийти практически с самого начала изучения экономической теории. При этом важны как знание традиционных математических курсов (математический анализ линейная алгебра, теория вероятностей), так и методов, применяемых в практической экономике и экономических исследованиях (математическая и экономическая статистика, исследование операций, теория игр, эконометрика и др.). Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем. Рассмотрим возможности использования понятия интеграла при решении экономических задач и описании экономических явлений.

Рассмотрим функцию $y = g(x)$, характеризующую неравномерность распределения доходов среди населения, где y – доля совокупного дохода, получаемого долей x беднейшего населения. График этой функции называется *кривой Лоренца* (Макс Лоренц (1876–1959) – американский экономист *и математик)* (рисунок).

Очевидно, что $0 \leq g(x) \leq x$при $x \in [0;\ 1]$, и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры. В связи с этим в качестве меры указанной неравномерности используют так называемый *коэффициент Джини k* (*Джини Корадо* (1884–1965) – итальянский экономист, статистик), равный отношению площади фигуры *OAB* к площади треугольника *OAC*. *Рассмотрим пример.*

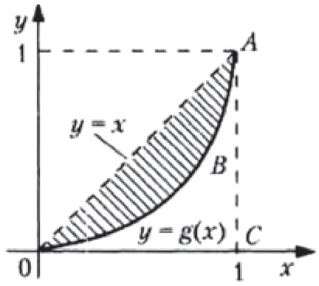

Рис. 1

По данным исследований о распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца *OBA* (см. рисунок) может быть описана уравнением

$$y = 1-\sqrt{1-x^2},$$

где x – доля населения; y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

Очевидно, что коэффициент Джини

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 2S_{OAB},$$

так как $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$.

Далее

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}+\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Интеграл вычислим с помощью тригонометрической подстановки

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t,\ \ dx=\cos t dt \\ x=0 \Rightarrow t=0, \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда коэффициент Джини $k = \frac{\pi}{2}-1 \approx 0{,}57.$

Достаточно высокое значение k показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием.* Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t – конечная сумма, полученная за t лет, и K – дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной суммой.* Если проценты простые, то $K = K_t\,(1 + it)$, где $i = \frac{p}{100}$ – удельная ставка процента. Тогда $K = \frac{K_t}{1+it}$. В случае сложных процентов $K = K_t\,(1 + it)^t$, поэтому $K = \frac{K_t}{\left(1+i\right)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ *и* при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. Можно показать, что в этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f\left(t\right)e^{-it}\,dt.$$

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод о том, что интегральное исчисление является мощным средством, как при решении прикладных экономических задач, так и для описания таких понятий экономической теории как коэффициент Джини, дисконтирование и многих других. Конечно, сегодня при решении экономических задач повсеместно используются специализированные программные продукты, позволяющие производить расчеты быстро и точно. Но наличие компьютерных технологий не отменяет необходимости оперирования фундаментальными знаниями, если речь идет о специалисте высокой квалификации, который готов решать сложные задачи, предлагая нестандартные решения.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Камбарова Е.С., Долгополова А.Ф.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: kitty_of_dream@mail.ru

Эконометрика как наука о количественном анализе реальных экономических явлений основывается на современном развитии теории и наблюдений, связанных с методами получения выводов. Получение эмпирических выводов экономических закономерностей является целью эконометрики. Она применяется в следующих случаях: во-первых, при определении рыночных тенденций и цен в случае применения метода рыночной калькуляции маржи не только на текущую и прошедшие даты, но и в виде прогноза на будущее. Во-вторых, эконометрические модели могут служить опорой в случае