

1) в экономической системе производятся, продаются, покупаются, инвестируются n – продуктов;

2) каждая отрасль является «чистой», т.е. производит только один продукт;

3) под производственным процессом в каждой отрасли понимается преобладание некоторого, а возможно и всех типов продуктов в определенном количестве.

При этом соотношение затраченного продукта и выпускаемого находятся в постоянном отношении.

Если для производства единицы i -продукта надо затратить a_{ij} j -продукта, то выпуск x -единиц i -продукта потребует $a_{ij}x$ единиц j -го.

Независимо от масштаба производства удельный выпуск и соотношение затрат представляются const.

При валовом выпуске x затраты i -продукта на все остальное производство составят $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$, тогда «чистый» выпуск должен быть не меньше, чем спрос на соответствующий продукт:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где y_i – спрос.

(2) – модель Леонтьева межотраслевого баланса [1]. Конечный спрос состоит из конечного потребления экспорта и инвестиций. Однако в модели он представляется заданным и требуется найти такой валовой выпуск для каждой отрасли, которая обеспечит заданный конечный спрос.

Сущность модели Леонтьева состоит в определении валового выпуска отраслей по заданному конечному спросу на основе данных о технологических возможностях [1]. Коэффициенты a_{ij} – называются технологическими, а матрица $A = (a_{ij})$ – технологическая или производственная матрица.

Наряду с моделью Леонтьева рассматривают более общую задачу – модель Леонтьева – Форда. Эта модель имеет вид

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 \\ y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 \end{cases} \quad (3)$$

и является моделью производства, в котором: вектор $x \in R^n$, $x \in \theta$ является вектором валового выпуска полезного продукта; $y \in R^m$, $y \in \theta$ – вектор вредных отходов в окружающей среде, возникающих, в частности, в процессе производства, подлежащих «уничтожению» с целью понижения содержания вредных продуктов до экологически обусловленного заданного уровня; $b_2 \in R^m$, $b_1 \in R^n$ – вектор чистого выпуска полезного продукта, A_{11} – $(n \times n)$ технологическая матрица, т.е. $A_{11}x$ – выражает вектор затрат полезного продукта при валовом выпуске вектора x ; A_{12} – $(n \times m)$ матрица, такая, что $A_{12}y$ – вектор затрат полезного продукта на уничтожение вредных отходов в «объеме» вектора y ; A_{21} – $(m \times n)$ матрица такая, что при выпуске валового вектора x полезного продукта в окружающую среду выделяется вектор $A_{21}x$ вредных отходов, A_{22} – $(m \times m)$ матрица, такая, что $A_{22}y$ – вектор вредных отходов, дополнительно возникающих при «уничтожении» вектора y вредных отходов.

Теоремы, доказанные Стеценко В.Я. [2], позволяют получать априорные оценки решения уравнения

$$\tilde{z} = \tilde{A} \tilde{z} + \tilde{b}; \quad (4)$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq \theta$$

на основе результатов по ускорению сходимости приближений к решению операторного уравнения [4] и [3].

Список литературы

1. Леонтьев В.В., Форд Д. // Экономика и математические методы. – 1972. – № 3.
2. Стеценко В.Я. Модель Леонтьева – Форда межотраслевого баланса, учитывающая экологический фактор. – Тамбов, XV Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях», 2002. – Т 5. – С. 154–157.
3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунтский Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
4. Колодяжная Т.А., Грובה Т.А. Применение теоремы о средних величинах при доказательстве неравенств. – Ставрополь, Научно-инновационные достижения СМС в области физико-математических наук и технических дисциплин. – 52 научно-методическая конференция. – 2007. – С. 128–131.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА – ФОРДА

Гулай Т.А., Копылова Е.П., Сурмачева А.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: laima5566@mail.ru

Загрязнение окружающей среды – побочный продукт обычной экономической деятельности.

Побочные продукты (как ценные, так и неценные) непосредственно связаны с системой физических взаимодействий, определяющих повседневное функционирование экономической системы. Техническую взаимозависимость между уровнями выпуска желательных и нежелательных продуктов, можно описать в терминах коэффициентов, которые используются для выявления взаимозависимости между всеми обычными отраслями производства и потребления. Поэтому побочные продукты производственной деятельности и потребления следует рассматривать как часть экономической системы. Модель, учитывающая экологический фактор известна как модель Леонтьева-Форда [1]:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + f_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j - f_i, & i = m+1, \dots, n \end{cases}$$

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, в которой учтены требования экологии

$$\begin{cases} \bar{x} \geq A_{11} \bar{x} + A_{12} \bar{y} + b_1 - A_{13} \bar{y} \\ A_{21} \bar{x} - \bar{y} \leq b_2 \\ \bar{x} \geq \theta, \bar{y} \geq \theta \quad (\bar{x} \in R^n, \bar{y} \in R^m) \end{cases} \quad (1)$$

представляющей из себя систему линейных неравенств.

Рассмотрим случай, когда $A_{13}(y) \neq \theta$. В этом случае модель Леонтьева – Форда имеет вид:

$$\begin{cases} x = A_{11}(x) + A_{12}(y) - A_{13}(y) + b_1 \\ y = A_{21}(x) + A_{22}(y) - b_2 \end{cases} \quad (2)$$

и предусматривает утилизацию вредных отходов. Решение этой системы обозначим через $\bar{x}$, $\bar{y}$ (если это решение существует).

Для нахождения решения данной системы используется теорема:

Теорема 1. Пусть (x_2, y_2) – решение системы (2) – с утилизацией вредных отходов, (x_1, y_1) – решение системы

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 \\ y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 \end{cases} \quad (3)$$

без утилизации вредных отходов. Тогда справедливо неравенство

$$(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1).$$

Приближенное решение модели Л-Ф

Рассмотрим алгоритм приближенного решения уравнений вида

$$x = A_1x + A_2x + f, \quad (4)$$

где A_1 – монотонно возрастающий оператор; A_2 – монотонно убывающий оператор, ибо модель (2) является моделью именно такого вида, т.е. $A_1 \uparrow, A_2 \downarrow$. Можно доказать утверждение:

Теорема 2. Пусть A_1, A_2 – монотонные относительно конуса K операторы, причем $A_1 \uparrow, A_2 \downarrow$ и существуют такие два элемента u_0, v_0 ($u_0 < v_0$), для которых выполняется условие

$$A_1u_0 + A_2v_0 + f \geq u_0; \quad (5)$$

$$A_1v_0 + A_2u_0 + f \leq v_0 \quad (6)$$

относительно конуса. Тогда для u_n, v_n , определенных формулами

$$u_{n+1} = A_1u_n + A_2v_n + f; \quad (7)$$

$$v_{n+1} = A_1v_n + A_2u_n + f, \quad (8)$$

где $(n = 0, 1, \dots)$, справедливы неравенства

$$u_n \leq u_{n+1}; \quad v_n \leq v_{n+1}. \quad (9)$$

Тогда вектор $x^* = \frac{1}{2}(u^* + v^*)$ является решением уравнения (4).

Границы u_1, v_1 решения x^* можно заметно сближить, если воспользоваться следующим результатом Стеценко В.Я., приведенного в [4].

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 число $m \geq 0$ таково, что $u_1 - u_0 \geq m(v_1 - v_0); v_0 - v_1 \geq m(u_1 - u_0)$.

Тогда для решения x^* справедливо неравенство

$$u_1^* = \frac{u_1 + mv_1}{1+m} \leq x^* \leq \frac{v_1 + mu_1}{1+m} = v_1^*. \quad (10)$$

При этом $u_1 \leq u_1^* \leq x^* \leq v_1^* \leq v_1$.

Формулу (10) можно рассматривать как рекуррентный процесс построения последовательностей u_n^*, v_n^* . Последовательности u_n^*, v_n^* монотонно по недостатку и по избытку (соответственно) сходятся к x^* , и, как правило, существенно быстрее, чем u_n, v_n .

Приведем еще пример построения монотонных приближений к решению на этот раз для случая задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y'(x) = (1-x)y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

Перейдем от этой задачи Коши к следующему эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x) = 1 + \int_0^x (1-s)y^2(s)ds. \quad (12)$$

Эквивалентность понимается здесь в том смысле, что каждое непрерывное решение уравнения (12) является решением задачи (11). Заметим, что в промежутке $(0; 1)$ подынтегральная функция в правой части (12) положительная, а на $(1; +\infty)$ – отрицательная. Поэтому оператор

$$T_1y(x) = \begin{cases} 1 + \int_0^x (1-s)y^2(s)ds & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 + \int_0^1 (1-s)y^2(s)ds & (1 \leq x) \end{cases} \quad (13)$$

возрастающий, а оператор

$$T_2y(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \int_1^x (1-s)y^2(s)ds & \text{для } 1 \leq x \end{cases} \quad (14)$$

убывающий. При этом задача (11) принимает вид

$$y = Ty(x), \quad (15)$$

где $T = T_1 + T_2$, причем $T_1 \uparrow$, а $T_2 \downarrow$. Для приближенного решения уравнения (11) можно воспользоваться методом

$$v_{n+1} = T_1v_n + T_2w_n + f;$$

$$w_{n+1} = T_1w_n + T_2v_n + f \quad (n = 0, 1, \dots)$$

где v_0 и w_0 таковы, что

$$v_0 \leq T_1v_0 + T_2w_0 + f = v_1;$$

$$w_1 = T_1w_0 + T_2v_0 + f \leq w_0.$$

Обозначим через $m \geq 0$ такую постоянную, для которой

$$w_0 - w_1 \geq m(v_1 - v_0); \quad v_1 - v_0 \geq m(w_0 - w_1), \quad (16)$$

и положим

$$\bar{w}_1 = \frac{w_1 + mv_1}{1+m}; \quad \bar{v}_1 = \frac{v_1 + mw_1}{1+m}. \quad (17)$$

Тогда $v_1 \leq \bar{v}_1 \leq x^* \leq \bar{w}_1 \leq w_1$.

Т.е. $\bar{v}_1$ и $\bar{w}_1$ располагаются к решению x^* уравнения $x = Tx + f$, вообще говоря, намного ближе, чем v_1 и w_1 . Переход от v_1, w_1 к $\bar{v}_1, \bar{w}_1$ согласно формулам (16), (17) представляет способ ускорения сходимости приближений к решению x^* .

Список литературы

1. Леонтьев В.В., Форд Д. // Экономика и математические методы. – 1972. – № 3.
2. Стеценко В.Я. Модель Леонтьева – Форда межотраслевого баланса, учитывающая экологический фактор // XV Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». – Тамбов, 2002. – Т. 5. – С. 154–157.
3. Стеценко В.Я., Галкина В.А. Метод построения приближений по недостатку и по избытку к положительному собственному вектору линейных и нелинейных положительных операторов. – Ставрополь: СтГТУ, 1993. – 26 с. – Деп. в ВИНТИ, 1069-В-93.
4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
5. Колодяжная Т.А., Грובה Т.А. Применение теоремы о средних величинах при доказательстве неравенств // Научно-инновационные достижения СМС в области физико-математических наук и технических дисциплин: 52 научно-методическая конференция. – Ставрополь, 2007. – С. 128–131.