ходом на стационар, колебательное установление численности, регулярное колебательное изменение (так называемые «предельные циклы») и хаотическое поведение без каких-либо видимых закономерностей. Все эти типы динамик наблюдаются в природе.

При изучении моделей, выраженных дифференциальными уравнениями, методика исследования в основном одинакова. Она представляет собой следующую последовательность:

● определение проблемы, введение терминологии, описание поведения определенных природных систем;

● создание математической модели;

● попытка качественного изучения модели, включая построение диаграмм на фазовой плоскости параметров модели;

● численное решение дифференциальных уравнений (как правило, простейшими из методов дискретизации, либо путем использования готовых программ).

Одна из основных задач математики в естествознании заключается в создании специализированного языка данной науки. Без сомнений можно говорить о том, что математический язык является многофункциональным и универсальным языком естествознания. Недаром немецкий математик Г.Вейль писал «... Все законы выводятся из опыта. Но для выражения их нужен специальный язык. Обиходный язык слишком беден, кроме того, он слишком не определен для выражения столь богатых содержанием точных и тонких соотношений. Таково первое основание, по которому физик не может обойтись без математики; она дает ему единственный язык, на котором он в состоянии изъясняться».

С помощью формул, уравнений и логического аппарата можно гораздо проще выразить сложные процессы происходящие в природе; благодаря ему можно точно дать определения количественным закономерностям, присущим изучаемым явлениям. Математический язык исключает неопределенность. Он очень лаконичен и ёмок. Его понятия и термины можно употреблять для обозначения самых разнообразных явлений окружающего нас мира. Данные преимущества свидетельствуют о том, что существуют прочные связи между языком математики и языком качественных описаний. Чем большей информацией о качественных свойствах явлений мы располагаем, тем эффективнее становится применение математических методов исследования, и наоборот, чем совершеннее количественные методы, тем лучше исследуются их качественные особенности.

Но у каждой медали есть и оборотная сторона. Математическому языку также присущи некоторые недостатки. Конечно, с помощью него можно описать количественно все явления и процессы на земле, но все же математика «убивает индивидуальность», как выразился российский математик И.Шафаревич, то есть не уделяется должное внимание богатству качественных проявлений мира. В математическом подходе описывается лишь какой-либо определенный аспект изучаемого явления, а остальные признаки опускаются. Математические формулы абстрактны и не имеют однозначного содержания. Но этот недостаток обусловлен тем, что математика не может функционировать иначе, необходимо все-таки помнить о рамках использования этой науки.

В современном мире роль математики в естествознании усиливается. Зачастую теоретические данные о каком-либо объекте являются неполноценными, пока не будет создано доказательство, основанное на математических методах, обосновывающих логику данных явлений и объектов.

Вселенная функционирует по законам математики в большей, чем мы предполагаем, мере. Вот почему эта наука сохраняет непреходящую ценность уже на протяжении долгих лет.

ИССЛЕДОВАНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА – ФОРДА

Гулай Т.А., Квеквескири Е.Н., Камова К.А.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: Kvekveskiri94@mail.ru

Значительное число задач анализа, алгебры, теории интегральных уравнений можно представить с единых позиций в виде линейного или нелинейного операторного уравнения вида:

$$x = A(x) + f \qquad (1)$$

с оператором $A(x)$, действующим в том или ином пространстве E. При этом для таких уравнений возникают весьма специфические задачи. В качестве довольно распространенных задач такого типа, например, встречается задача о существовании у таких уравнений решения $x = x^*$, обладающего свойством неотрицательности: $x^* \geq \theta$. Такого рода задачи, вообще, специфичны в задачах экономики, для которых экономический смысл имеют лишь неотрицательные решения (типичный пример – модель Леонтьева межотраслевого баланса).

Поэтому при рассмотрении подобных задач предполагается наличие в пространстве дополнительной структуры–конуса K, с помощью которого в пространстве E вводится полуупорядоченность: для некоторых пар векторов $x, y \in E$ определено отношение $x \geq y$, являющееся аналогом обычного скалярного неравенства: $x \geq y$ если $(x - y) \in K$. От свойств конуса в пространстве E и оператора A, действующего в этом пространстве зависит существование решения x^* у уравнения (1), а также способ, с помощью которого можно построить приближения к этому решению. Загрязнение окружающей среды – побочный продукт обычной экономической деятельности.

Побочные продукты (как ценные, так и неценные) непосредственно связанны с системой физических взаимодействий, определяющих повседневное функционирование экономической системы. Техническую взаимозависимость между уровнями выпуска желательных и нежелательных продуктов, можно описать в терминах коэффициентов, которые используются для выявления взаимозависимости между всеми обычными отраслями производства и потребления. Поэтому побочные продукты производственной деятельности и потребления следует рассматривать как часть экономической системы. Модель, учитывающая экологический фактор известна как модель Леонтьева-Форда [1]:

$$\begin{cases} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j + f_i, & i = 1, 2, ... m \\ x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j - f_i, & i = m+1, ..., n \end{cases}$$

Рассмотрим статистическую линейную модель межотраслевой экономики, – модель Леонтьева. В ее основе лежат следующие предположения:

1) в экономической системе производятся, продаются, покупаются, инвестируются n – продуктов;

2) каждая отрасль является «чистой», т.е. производит только один продукт;

3) под производственным процессом в каждой отрасли понимается преобладание некоторого, а возможно и всех типов продуктов в определенном количестве.

При этом соотношение затраченного продукта и выпускаемого находятся в постоянном отношении.

Если для производства единицы i-продукта надо затратить a_{ij} j-продукта, то выпуск x-единиц i-продукта потребует $a_{ij}x$ единиц j-го.

Независимо от масштаба производства удельный выпуск и соотношение затрат представляются const.

При валовом выпуске x затраты i-продукта на все остальное производство составят $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$, тогда «чистый» выпуск должен быть не меньше, чем спрос на соответствующий продукт:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i \quad (i = 1,2\ldots n), \qquad (2)$$

где y_i – спрос.

(2) – модель Леонтьева межотраслевого баланса [1]. Конечный спрос состоит из конечного потребления экспорта и инвестиций. Однако в модели он представляется заданным и требуется найти такой валовой выпуск для каждой отрасли, которая обеспечит заданный конечный спрос.

Сущность модели Леонтьева состоит в определении валового выпуска отраслей по заданному конечному спросу на основе данных о технологических возможностях [1]. Коэффициенты a_{ij} – называются *технологическими*, а матрица $A = (a_{ij})$ – *технологическая* или *производственная* матрица.

Наряду с моделью Леонтьева рассматривают более общую задачу – модель Леонтьева – Форда. Эта модель имеет вид

$$\begin{cases} x = A_{11}x + A_{12}y + b_1 \\ y = A_{21}x + A_{22}y - b_2 \end{cases} \qquad (3)$$

и является моделью производства, в котором: вектор $x \in R^n$, $x \in \theta$ является вектором валового выпуска полезного продукта; $y \in R^m$, $y \in \theta$ – вектор вредных отходов в окружающей среде, возникающих, в частности, в процессе производства, подлежащих «уничтожению» с целью понижения содержания вредных продуктов до экологически обусловленного заданного уровня; $b_2 \in R^m$, $b_1 \in R^n$ – вектор чистого выпуска полезного продукта, A_{11} – $(n\times n)$ технологическая матрица, т.е. $A_{11}x$ – выражает вектор затрат полезного продукта при валовом выпуске вектора x; A_{12} – $(n\times m)$ матрица, такая, что $A_{12}y$ – вектор затрат полезного продукта на уничтожение вредных отходов в «объеме» вектора y; A_{21} – $(m\times n)$ матрица такая, что при выпуске валового вектора x полезного продукта в окружающую среду выделяется вектор $A_{21}x$ вредных отходов, A_{22} – $(m\times m)$ матрица, такая, что $A_{22}y$ – вектор вредных отходов, дополнительно возникающих при «уничтожении» вектора y вредных отходов.

Теоремы, доказанные Стеценко В.Я. [2], позволяют получать априорные оценки решения уравнения

$$\tilde{z} = \tilde{A}\tilde{z} + \tilde{b}; \qquad (4)$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq \theta$$

на основе результатов по ускорению сходимости приближений к решению операторного уравнения [4] и [3].

Список литературы

1. Леонтьев В.В., Форд Д. // Экономика и математические методы. – 1972. – № 3.

2. Стеценко В.Я. Модель Леонтьева – Форда межотраслевого баланса, учитывающая экологический фактор. – Тамбов, XV Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях», 2002. – Т 5. – С. 154–157.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

4. Колодяжная Т.А., Гробова Т.А. Применение теоремы о средних величинах при доказательстве неравенств. – Ставрополь, Научно-инновационные достижения СМС в области физико-математических наук и технических дисциплин. – 52 научно-методическая конференция. – 2007. – С. 128–131.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА – ФОРДА

Гулай Т.А., Копылова Е.П., Сурмачева А.В.

Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, e-mail: laima5566@mail.ru

Загрязнение окружающей среды – побочный продукт обычной экономической деятельности.

Побочные продукты (как ценные, так и неценные) непосредственно связанны с системой физических взаимодействий, определяющих повседневное функционирование экономической системы. Техническую взаимозависимость между уровнями выпуска желательных и нежелательных продуктов, можно описать в терминах коэффициентов, которые используются для выявления взаимозависимости между всеми обычными отраслями производства и потребления. Поэтому побочные продукты производственной деятельности и потребления следует рассматривать как часть экономической системы. Модель, учитывающая экологический фактор известна как модель Леонтьева-Форда [1]:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + f_i, & i = 1,2,\ldots m \\ x_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j - f_i, & i = m+1,\ldots,n \end{cases}$$

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, в которой учтены требования экологии

$$\begin{cases} \overline{x} \geq A_{11}\overline{x} + A_{12}\overline{y} + b_1 - A_{13}\overline{y} \\ A_{21}\overline{x} - \overline{y} \leq b_2 \\ \overline{x} \geq \theta, \overline{y} \geq \theta \quad (\overline{x} \in R^n, \overline{y} \in R^m) \end{cases} \qquad (1)$$

представляющей из себя систему линейных неравенств.

Рассмотрим случай, когда $A_{13}(y) \neq \theta$. В этом случае модель Леонтьева – Форда имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= A_{11}(x) + A_{12}(y) - A_{13}(y) + b_1 \\ y &= A_{21}(x) + A_{22}(y) - b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и предусматривает утилизацию вредных отходов. Решение этой системы обозначим через $\overline{x}$, $\overline{y}$ (если это решение существует).

Для нахождения решения данной системы используется теорема: