РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Куттыкожаева Ш.Н., Евниев Б.Е., Бектелеуова А.А.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, e-mail: shaharzat@mail.ru

В данной работе рассматривается регуляризация с малым параметром нестационарной модели несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей. Получено существование и сходимость обобщенного решения приближенной задачи, а также выведены равномерные априорные оценки и оценка скорости сходимости решения.

Рассмотрим уравнения вязкой несжимаемой жидкости в форме Ламба-Громека:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times rot\vec{v} = \mu \cdot \Delta\vec{v} - \nabla Q + \vec{f}; \qquad (1)$$

$$div\vec{v} = 0,$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x),\ div\,\vec{v}_0(x) = 0, \quad \vec{v}\big|_S = 0, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Q = P + |\vec{v}|^2/2$ – полный напор. Будем считать, что область $\Omega \subset R^3$ – прямоугольный параллелепипед. В работах [1], [3] предложены некоторые численные методы решения задач (1)–(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей». В [3] показано эквивалентность двух задач. Рассмотрим задачу (1)–(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей»:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + rot(rot \times \omega) = \mu \cdot \Delta\omega - rotf, \qquad (3)$$

$$\Delta\psi = -\omega\ ,$$

со следующими начально-краевыми условиями:

$$\begin{gathered} \omega\big|_{t=0} = \omega_0(x), \\ \psi \cdot \tau_1\big|_S = \psi \cdot \tau_2\big|_S = 0, \quad (\omega \cdot n)\big|_{x_1=0} = 0 \\ rot\psi \cdot \tau_1\big|_S = rot\psi \cdot \tau_2\big|_S = 0, \\ div\,\psi\big|_S = 0. \end{gathered} \qquad (4)$$

Для ясности продемонстрируем граничное условие (4) в случае прямоугольной области. Пусть часть границы области лежит на оси $x_1 = 0$. Тогда начально-краевые условия преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} \omega\big|_{t=0} = \omega_0(x), \\ \psi_2\big|_{x_1=0} = \psi_3\big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

и

$$\begin{gathered} (\omega \cdot n)\big|_{x_1=0} = \omega_1\big|_{x_1=0} = 0, \\ \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0. \end{gathered} \qquad (6)$$

Исходная система уравнений с малым параметром имеет вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \omega^\varepsilon}{\partial t} + rot(rot\psi^\varepsilon \times \omega^\varepsilon) = \mu \cdot \Delta\omega^\varepsilon - rotf; \\ \varepsilon \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial t} = \Delta\psi^\varepsilon + \omega; \end{gathered} \qquad (8)$$

с начально-краевыми условиями:

$$\begin{gathered} \omega^\varepsilon\big|_{t=0} = \omega_0(x), \quad \psi^\varepsilon\big|_{t=0} = \psi_0(x); \\ \psi_2^\varepsilon\big|_{x_1=0} = \psi_3^\varepsilon\big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0, \quad \omega_1^\varepsilon\big|_{x_1=0} = 0; \\ \left(\frac{\partial \psi_2^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_2}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0; \\ \left(\frac{\partial \psi_3^\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1^\varepsilon}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_1=0} = 0 \end{gathered} \qquad (9)$$

Определение обобщенного решения задач (8), (9) дается аналогично [2].

Теорема 1.

$$\psi_0(x) \in W_2^2(\Omega),$$

$$\omega_0(x) \in W_2^1(\Omega),$$

$$S \in C^2.$$

Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (8)-(9) и для него имеет место оценки:

$$\varepsilon\left\|\psi^\varepsilon\right\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} + \left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} + \left\|\omega^\varepsilon\right\|_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} \le C < \infty.$$

Теорема 2. Обобщенное решение задачи (8)–(9) сходится к обобщенному решению задачи (3), (5), (6) при $\varepsilon \to 0$ со скоростью

$$\left\|\psi^\varepsilon - \psi\right\|^2_{L_1(0,T,l_2(\Omega))} + \int_0^T \left\|\omega^{\varepsilon^\varepsilon} - \omega\right\|_{L_2(\Omega)} dt \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Список литературы

1. Бессонов О.А., Брайловская В.А., Ру Б. Численное моделирование трехмерного сдвигового течения в полости с движущимися крышками // Механика жидкости и газа. – 1998. – № 3. – С. 41–49.

2. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.

3. Калтаев А., Смагулов Ш.С., Шлембаев К.Т. К теории численного решения пространственных задач течения вязкой жидкости в переменных «функция тока – вихрь скоростей» в односвязной области // Труды международной конференции «Современные проблемы механики». – Алматы, 2001. – С. 77–82.