УДК 517

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ДАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Ильяшева Г.И., Саябаева А.Р.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, e-mail: gulzhamal@inbox.ru

Эта работа показывает соотношение между стационарной задачей Шредингера и нестационарной задачей для одномерного волнового уравнения с нелокальным потенциалом. Эта связь выражается в определении дискретного спектра стационарной задачи по данным нестационарной задачи.

Ключевые слова: дискретный спектр, стационарная задача, нестационарная задача

DETERMINATION OF THE DISCRETE SPECTRUM OF THE STATIONARY PROBLEM OF THE DATA NON-STATIONARY PROBLEMS

Ilyasheva G.I., Sayabaeva A.R.

Kokshetau State University. Sh. Ualikhanov, Kokshetau, e-mail: gulzhamal@inbox.ru

This work shows the relation between stationary problem of Shredinger and non-stationary problem for univariate wave equation with non-local potential. This relation is expressed in determining the discrete spectrum of stationary problem from the data of non-stationary problem.

Keywords: discrete spectrum, stationary problem, nonstationary problem

Большой практический интерес представляет определение собственных значений сложных дифференциальных операторов.

Рассмотрим в пространстве функций одной переменной уравнение Шредингера [4]

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\phi(x,k)+k^2\phi(x,k)=-q(x)N(k), \quad (1)$$

где $x, y \in R$, $k > 0$ и

$$N(k)=\int_R q(y)\phi(y,k)\,dy.$$

Пусть q – вещественная локально-интегрируемая функция, удовлетворяющая условиям:

$$(1+|x|)\,q(x)\in L_1(R)\cap L_2(R); \quad (2)$$

$$\frac{dq(x)}{dx}\in L_2(R). \quad (3)$$

Обозначим множество всех функций q, удовлетворяющих условиям (2) и (3) через M.

Среди множества решений уравнения (1) будут интересовать те решения, которые на бесконечности $(|x|\to\infty)$ удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда [1].

Рассмотрим оператор Шредингера

$$H=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-Q$$

где Q – оператор, действующий по правилу

$$Qf(x)=q(x)\int q(y)\,f(y)\,dy.$$

Основным результатом теории рассеяния [3] является утверждение о том, для оператора H существует инвариантное относительно H разложение пространства $L_2(R)$ в ортогональную сумму

$$L_2(R)=X_d+X_{a.c}$$

собственных подпространств, соответствующих дискретному и абсолютно-непрерывному спектру этого оператора.

Оператор H имеет конечное число собственных значений, причем эти значения действительные положительные. Обозначим их через $E_j^2\,(j=1...N)$, а соответствующие им собственные функции – через ψ_j, через q_j – коэффициенты Фурье в разложении функции q по собственным функциям ψ_j

$$q_j=\int_R q(x)\psi_j(x)\,dx.$$

В данной работе предлагается метод определения собственных значений оператора H из данных обратной нестационарной задачи. Дадим ее постановку.

Известно [2], что постановка обратной задачи неразрывно связана с постановкой прямой задачи, которая имеет следующий вид: в пространстве функций одной переменной для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=q(x)\int_R q(y)u(y,t)\,dy, \quad (4)$$

в области $G=\{(x,t)\colon x\in R, t\ge 0\}$ найти функцию $u_\varepsilon(x,t)\in C^2(R)^2$, удовлетворяющую уравнению (4) и начальным условиям

$$u_\varepsilon\big|_{t=0}=0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}, \qquad (6)$$

где ε – некоторая константа, $\varepsilon > 0$.

Сразу оговорим, что функция $q(x)$ должна удовлетворять условиям (2)и (3).

Введем обозначение

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x,t). \qquad (7)$$

Положим, что при $t < 0$ функция $u(x, t)$ продолжается нулем.

Поставим для уравнения (4) следующую обратную задачу: найти функцию $q(x) \in C(R)$, если задано дополнительное условие

$$ip\tilde{u}(o,p) + \frac{\partial \tilde{u}(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \tilde{f}(p).$$

В процессе исследования прямой нестационарной задачи получено ее свойство, выраженное в следующей теореме.

Теорема 1. Для функции (7) имеет место соотношение

$$ip\tilde{u}(o,p) + \frac{\partial \tilde{u}(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 4\pi\left[u_1^-(0,p) - u_1^+(0,p)\right] + \\ +\frac{1}{2}\left[\tilde{q}(p)\sum_{j=1}^{N} C_{1j}q_j\delta(E_j - p) + \tilde{q}(p)\sum_{j=1}^{N} C_{2j}q_j\delta(-E_j - p)\right], \qquad (8)$$

где u_1^+, u_1^- – собственные функции непрерывного оператора Шредингера; C_{1j}, C_{2j} – некоторые коэффициенты.

Так как, согласно постановке обратной нестационарной задачи, функция

$$\tilde{f}(p) = ip\tilde{u}(o,p) + \frac{\partial \tilde{u}(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

считается известной, то из соотношения (8) следует, что для функции $\tilde{f}(p)$ имеет место также следующее представление

$$\tilde{f}(p) = 4\pi\left[u_1^-(0,p) - u_1^+(0,p)\right] + \\ +\frac{1}{2}\left[\tilde{q}(p)\sum_{j=1}^{N} C_{1j}q_j\delta(E_j - p) + \tilde{q}(p)\sum_{j=1}^{N} C_{2j}q_j\delta(-E_j - p)\right]. \qquad (9)$$

Равенство (9) выражает связь данных обратной нестационарной и стационарной задач.

Имеет место

Утверждение. Для собственных значений E_j^2 оператора Шредингера справедливо равенство

$$\tilde{q}(E_j) = 0.$$

Тогда в силу утверждения 1 два члена во вторых квадратных скобках выражения (9) в обобщенном смысле равны нулю. Следовательно,

$$\tilde{f}(p) = 4\pi\left[u_1^-(0,p) - u_1^+(0,p)\right].$$

Доказана

Теорема 2. При $p = E_j$ функция $\tilde{f}(p)$ равна нулю, т.е.

$$\tilde{f}(E_j) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.

2. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: Наука, 1972. – 301 с.

3. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния II // Современные проблемы математики. – М.:ВИНИТИ, 1974. – С. 93–180.

4. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. – М.: Мир, 1980. – 408 с.