УДК.517.956.(927)

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Нахушева Ф.Б.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Исследован вопрос однозначной разрешимости нелокальной задачи для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Ключевые слова: задача Бицадзе – Самарского, задача Коши, уравнение Вольтерра, функция Грина

NONLOKAL PROBLEM FOR THE LOADED EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Nakhusheva F.B.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik, e-mail: proporwiz@yandex.ru

Nonlokal problem investigated for the loaded equation for the third order with multiple characteristics.

Keywords: Bitsadze – Samarskii problem, Cauchy problem, Volterr equation, Green's function

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями. В частности, многие математические модели тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, сводятся к краевым задачам для уравнений смешанного типа.

Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются нагруженные уравнения смешанного типа. Исследованием локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных и ненагруженных уравнений занимались авторы [2 – 10]. Подробная библиография работ содержится в [6, 7].

Цель исследования: доказать существование и единственность решения нелокальной задачи для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxx}-u_y-\lambda_1 u(l,y),\ y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda_2 u(x,y),\ y<0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $\lambda_2 \ge 0$ в конечной области Ω, плоскости переменных x и y, ограниченных отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x = 0$, $x = l$, $y = h$ соответственно и характеристиками AC: $x + y = 0$, BC: $x - y = l$ уравнения (1).

Обозначим через $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$ и $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$.

Задача. Найти функцию

$$u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1\cup\Omega_2$ и условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),u_x(0,y)=\varphi_2(y),0\le y\le h, \qquad (2)$$

$$\left[\alpha_1(y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1(y)u\right]\Bigg|_{x=x_0}=\left[\alpha_2(y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2(y)u\right]\Bigg|_{x=l}+\delta(y), \qquad (3)$$

$$u\big|_{AC}=\psi(x),\ \ 0\le x\le\frac{l}{2}, \qquad (4)$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C[0,h],\psi(x)\in C^2\left[0,\frac{l}{2}\right];\quad \alpha_i(y),\beta_i(y),(i=1,2);\delta(y)-$ заданные функции, непрерывные в замыкании области их задания, причем $\varphi_1(0)=\psi(0)$.

Доказательство существования и единственности решения задачи.

Пусть $u(x,0)=\tau(x), u_y(x,0)=\upsilon(x)$ и $u(l,y)=\varphi_3(y)$, где $\varphi_3(y)\in C[0,h]$. Переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to 0+$, получим функциональное соотношение между $\tau(x), \upsilon(x)$, принесенное из области Ω_1 на AB

$$\tau'''(x)-\upsilon(x)-\lambda_1\tau(l)=0. \qquad (5)$$

В области Ω_2 решение задачи Коши для уравнения (1) при $\lambda_2=0$ имеет вид [1]

$$u(x,y)=\frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}v(t)dt.$$

Удовлетворяя последнее условию (4) при $y\to -0$, получим функциональное соотношение, принесенное из области Ω_2 на линию AB

$$\tau'(x)-\upsilon(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right), 0<x<l. \qquad (6)$$

Исключая $\upsilon(x)$ из (5) и (6), получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\tau'''(x)-\tau'(x)=\lambda_1\tau(l)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}&\tau(0)=\phi_1(0), \tau'(0)=\phi_2(0),\\ &\alpha_1(0)\tau'(x_0)+\beta_1(0)\tau(x_0)=\alpha_2(0)\tau'(l)+\beta_2(0)\tau(l)+\delta(0).\end{aligned} \qquad (8)$$

Задача (7) и (8) решается обычным методом вариации произвольных постоянных. По найденному *t*(*x*) определяется *n*(*x*) из соотношения (6) и решение задачи (1) – (4) в области Ω_2 как решение задачи Коши.

После определения *t*(*x*) в области Ω_1 приходим к задаче (1), (2) и $u(x,0)=\tau(x)$, решение которой имеет вид [2]

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\frac{\lambda_1}{\pi}\int_0^l d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta, \qquad (9)$$

где

$$u_0(x,y)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)u(0,\eta)d\eta-\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;l,\eta)u(l,\eta)d\eta-\right.$$
$$\left.-\int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)u_{\xi}(0,\eta)d\eta+\int_0^l G(x,y;\xi,0)u(\xi,0)d\xi\right\}.$$

Функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta)$ – представляется через фундаментальные решения, имеющие вид [2], [3]

$$U(x,y;\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}}f\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y>\eta,\\ 0, & y\le\eta,\end{cases}$$

$$V(x,y;\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\varphi\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y\ge\eta,\\ 0, & y\le\eta,\end{cases}$$

где

$$f(t)=\frac{\pi\sqrt{t}}{3\sqrt{3}}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\right)+I_{-1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\right)\right];$$

$$\varphi(t)=\frac{\pi\sqrt{t}}{3}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\right)+I_{-1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2}\right)\right];$$

$I_v(z)-$ функция Бесселя, $f(t)$ и $j(t)$ – функции Эйри.

Удовлетворяя (9) условию (3), получим интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно функции $u(l,y)=\varphi_3(y)$:

$$\beta_2(y)\varphi_3(y)+\int_0^y K(y,\eta)\varphi_3(\eta)d\eta=v(y),$$

где ядро $K(y,\eta)$ – выражается через известные функции, которое безусловно и однозначно разрешимо.

Пусть теперь $\lambda_2\neq 0$. В этом случае решение уравнения (1) непрерывное в $\overline{\Omega}_2$ с непрерывными производными до второго порядка включительно в Ω_2 дается формулой [3]

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\mathrm{I}_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{(x-\xi)-y^2}\right)\upsilon(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_2}\,y\int_{x-y}^{x+y}\frac{\mathrm{I}_1\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{(x-\xi)-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)-y^2}}\tau(\xi)d\xi, \qquad (10)$$

где $\mathrm{I}_0(z),\mathrm{I}_1(z)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Удовлетворяя (10) условию (4), получим

$$\upsilon(x)-\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\int_0^x \mathrm{I}_{0x}\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\frac{\xi}{\sqrt{\xi(\xi-x)}}\upsilon(\xi)d\xi=$$

$$=\tau'(x)+\frac{\lambda_2 x}{4}\tau(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x \overline{\mathrm{I}}_1\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\tau(\xi)d\xi- \qquad (11)$$

$$-\frac{\lambda_2^{3/2}x}{4}\int_0^x \overline{\mathrm{I}}_{1x}\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\frac{\xi}{\sqrt{\xi(\xi-x)}}\tau(\xi)d\xi,$$

где $\overline{I}_1(z)=I_1(z)/z$.

Уравнение (11) является уравнением Вольтерра второго рода относительно функции $\nu(x)$ и его решение можно выписать с помощью резольвенты $R(x,\xi,\lambda)$ ядра в виде

$$\upsilon(x)=\tau'(x)+\frac{\lambda_2 x}{4}\tau(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)-$$

$$-\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x\left[\frac{\sqrt{\lambda_2}x}{2}\overline{\mathrm{I}}_{1x}\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\frac{\xi}{\sqrt{\xi(\xi-x)}}-\overline{\mathrm{I}}_1\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\right]\tau(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda\int_0^x R(x,\xi,\lambda)\left\{\tau'(\xi)+\frac{\lambda_2\xi}{4}\tau(\xi)-\frac{\lambda_2}{2}\int_0^\xi\left[\overline{\mathrm{I}}_{1\xi}\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi_1(\xi_1-\xi)}\right)\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1(\xi_1-\xi)}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{\mathrm{I}}_1\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi_1(\xi_1-\xi)}\right)\right]\tau(\xi_1)d\xi_1-\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)\right\}d\xi.$$

Подставляя значение функции $u(x)$ в (5), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $t(x)$:

$$\tau'''(x)-\tau'(x)-q(x)\tau(x)=F(x),$$

где $q(x)$, $F(x)$ – выражаются через известные функции

$$q(x)=\frac{\lambda_2 x}{4}+\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}R\left(x,x,\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\right),$$

$$F(x)=\int_0^x R\left(x,\xi,\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\right)\psi'\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi+\lambda_1\tau(l)-\int_0^x N(x,\xi)\tau(\xi)d\xi,$$

$$N(x,\xi)=\frac{\lambda_2}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\overline{I_{1x}}\left(\sqrt{\lambda_2\xi(\xi-x)}\right)\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\xi(\xi-x)}}-\right.$$

$$\left.-\overline{I_1}\left(\sqrt{\lambda_2\xi(\xi-x)}\right)\right]-2R_\xi\left(x,.\xi,\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\right)+\frac{\lambda_2\xi}{4}R\left(x,\xi,\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\right).$$

Интегрируя уравнение трижды от 0 до x с учетом (8), будем иметь

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2F(\xi)d\xi+\varphi_1(0)\left[\frac{x^2}{2}+1\right]+\varphi_2(0)x+$$

$$+\frac{1}{2}\tau''(0)x^2+\int_0^x R_1(x,\xi)\left\{\frac{1}{2}\int_0^\xi(\xi-\xi_1)^2F(\xi_1)d\xi_1+\varphi_1(0)\left[\frac{\xi^2}{2}+1\right]+\varphi_2(0)\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\tau''(0)\xi^2\right\}d\xi.$$

После определения $t(x)$ в области Ω_1 снова приходим к задаче (1), (2), $u(x,0)=\tau(x),u(l,y)=\varphi_3(y)$, решение которой дается формулой (9). В области Ω_2 решение задачи определяется по формуле (10). Следовательно, решение задачи однозначно определяется в областях Ω_1 и Ω_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М: Наука, 1981. – 448 с.

2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.

3. Елеев В.А. Краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа // Укр. мат. журнал. – 1995. – Т.47, № 1. – С. 20-30.

4. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – № 5. – С. 5-14.

5. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – т. 17, № 1. – С. 81-90.

6. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. КБНЦ РАН/ – М.: Наука, 2012. – 232 с.

7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – т. 48, № 8. – С. 1140-1149.

9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – № 4(29). – С. 17–25.

10. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – № 1(30). – С. 150-158.

11. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. // Вестник Самарского государственного университета. Естественно – научная серия. – 2012. – № 9(100). – С. 52–60.