УДК.517.956.(927)

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Абрегов М.Х., Гучаева З.Х.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова»
Министерства образования и науки РФ, Нальчик, e-mail: proporz@yandex.ru

Исследован вопрос однозначной разрешимости аналога задачи Бицадзе-Самарского с дробной производной в краевом условии для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа. Путем редукции к уравнению Вольтера второго рода доказана однозначная и безусловная разрешимость задачи.

Ключевые слова: задача Бицадзе-Самарского, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, задача Коши, уравнение Вольтера

AN ANALOQUE OF THE BITSADZE-SAMARSKII PROBLEM FOR THE MIXED TUPE HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

Abregov M.K., Guchaeva Z.K.

FGBOU VPO «Kabardin-Balkar state university n.a. Kh. M. Berbekov», Nalchik,
e-mail: proporz@yandex.ru

The paper is devoted to the study of a boundary-value problem analogy of the Bitsadze-Samarskii problem for the mixed tupe hyperbolic-parabolic equation with operators of fractional differentiation in the boundary condition. Existence and uniqueness of the solution is proved by the reductions to equation of Volterra second sort, which unconditional solvable.

Keywords: Bitsadze-Samarskii problem, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Cauchy problem, Volterra equation

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными, что объясняется как теоретической значимостью результатов, так и их приложениями в газовой динамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в математической биологии и других областях.

В настоящее время теория уравнений смешанного типа развивается быстрыми темпами. Успехи современного естествознания требуют дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных, что приводит к необходимости исследования локальных и нелокальных краевых задач, в том числе задач со смещением для уравнений смешанного и смешанно – составного типов.

Цель исследования: доказать существование и единственность решения задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного гиперболо – параболического типа.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xx}, & x > 0, \\ |x|^m u_{yy} - u_{xx}, & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m = const > 0$, в конечной области

D , ограниченной отрезками CD , OD , DC

прямых $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ и характеристиками

$$AO: y - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \\ AB: y + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1 \quad \text{уравнения (1)}$$

при $x < 0$.

Пусть $D^+ = D \cap (x > 0)$, $D^- = D \cap (x < 0)$, $J \equiv OB$ – единичный интервал $0 < y < 1$ прямой $x = 0$.

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$ и такую, что $u_x(0, y)$ на концах интервала J может обращаться в бесконечность порядка $1 - 2\epsilon$, где $\epsilon = \frac{m}{2m+4}$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

$$D_{oy}^{1-\varepsilon} u[\theta(y)] = a(y)u_x(0, y) + b(y), \quad 0 < y < 1, \quad (4)$$

где $\varphi_1(y) \in C(\bar{J})$, $\varphi_0(x) \in C(0 \leq x \leq 1)$, $a(y), b(y) \in C^1(\bar{J})$; $\theta_0(y)$ – точка пересечения характеристики, выходящей из точки $(0, y) \in J$, с характеристикой AO ; D_{oy}^ℓ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, определяемый по формуле [10]

$$D_{oy}^\ell f = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\ell)} \int_0^y \frac{f(t) dt}{(y-t)^{1+\ell}}, & \ell < 0, \\ \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} D_{oy}^{\ell-(n+1)} f, & \ell > 0, \end{cases}$$

где $n = [\ell]$, $\Gamma(\ell)$ – гамма-функция.

Задача (1) – (4) относится к классу краевых задач со смещением [7], исследованием которых занимались многие авторы [1-9] для уравнений смешанного типа. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что они существенно обобщают задачу Трикоми, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач и имеют многомерные аналоги.

Пусть $u(0, y) = \tau(y)$, $u_x(0, y) = v(y)$.

Тогда решение задачи Коши в области D^- представимо в виде [7]

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} \int_0^1 \tau \left[y + \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] \cdot t^{\varepsilon-1} (1-t)^{\varepsilon-1} dt + \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} x \int_0^1 v \left[y + \frac{2}{m+2} (-x)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] \cdot t^\varepsilon (1-t)^\varepsilon dt. \quad (5)$$

Удовлетворив

$$u[\theta(y)] = \gamma_0 y^{1-2\varepsilon} D_{oy}^{-\varepsilon} y^{\varepsilon-1} \tau(y) - \gamma_1 D_{oy}^{\varepsilon-1} y^{-\varepsilon} v(y),$$

где $\gamma_0 = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}$, $\gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \left[\frac{y}{2(1-2\varepsilon)} \right]^{1-2\varepsilon}$,

условию (4), получим основное функциональное соотношение между $\tau(y)$ и $v(y)$, принесенное из гиперболической части D^- на J

$$a_1(y)v(y) = \gamma_0 D_{oy}^{1-2\varepsilon} \tau(y) - y^\varepsilon b(y),$$

где $a_1(y) = a(y)y^\varepsilon + \gamma_1$, или, что тоже самое,

$$\tau(y) = \frac{1}{\gamma_0} D_{oy}^{2\varepsilon-1} a_1(y)v(y) + \frac{1}{\gamma_0} D_{oy}^{2\varepsilon-1} y^\varepsilon b(y). \quad (6)$$

Для нахождения функционального соотношения между $\tau(y)$ и $v(y)$, принесенного из D^+ на J рассмотрим задачу: Найти регулярное решение уравнения (1) при

$x > 0$, удовлетворяющее условиям (2)-(3), $u_x(0, y) = v(y)$.

Известно [9], что решение этой задачи существует, единственно и дается формулой

$$u(x, y) = \int_0^y v(\eta) G(0, \eta; x, y) d\eta + \int_0^1 \varphi_0(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi - \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(1, \eta; x, y) d\eta,$$

где $G(\xi, \eta; x, y) = (y-\eta)^{\frac{-1}{2}} G_0(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина;

$$G_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] + \exp \left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}$$

$$-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]. \quad (8)$$

Отсюда второе функциональное соотношение между $\tau(y)$ и $v(y)$, принесенное из D^+ на J имеет вид

$$\tau(y) = \int_0^y v(\eta)G(0, \eta; 0, y) d\eta + \int_0^1 \varphi_0(\xi)G(\xi, 0; 0, y) d\xi - \int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(1, \eta; 0, y) d\eta$$

или

$$\tau(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{v(\eta)}{(y-\eta)^{1/2}} d\eta + \int_0^y k(y, \eta)v(\eta) d\eta + \psi(y), \quad (9)$$

где

$$\psi(y) = \int_0^1 \varphi_0(\xi)G(\xi, 0; 0, y) d\xi - \int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(1, \eta; 0, y) d\eta,$$

$$k(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(y-\eta)^{1/2}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\frac{n^2}{y-\eta}} - e^{-\frac{(n-1)^2}{y-\eta}} \right] - e^{-\frac{1}{y-\eta}} \right\}.$$

Знак $\sum'$ означает, что в сумме отсутствует слагаемое, соответствующее значению $n=0$.

Подставляя $\tau(x)$ из (6) в (9), получим уравнение относительно $v(y)$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{v(\eta)}{(y-\eta)^{1/2}} d\eta + \int_0^y k(y, \eta)v(\eta) d\eta - \frac{1}{\gamma_0 \Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^y \frac{a_1(\eta)v(\eta) d\eta}{(y-\eta)^{2\varepsilon}} = f(y),$$

где

$$f(y) = \frac{1}{\gamma_0} D_{oy}^{2\varepsilon-1} y^\varepsilon b(y) - \psi(y).$$

Отсюда, применив формулу обращения интегрального уравнения Абеля, после ряда преобразований получим

$$v(y) - \int_0^y \frac{k^*(y, \eta)}{(y-\eta)^{2\varepsilon}} v(\eta) d\eta = q(x), \quad (10)$$

где $k^*(y, \eta) \in C(\bar{J} \times \bar{J}) \cap C^1(J \times J)$,

$q(x) \in C^1(J)$ – известные функции.

Уравнение (10) является интегральным уравнением Вольтера второго рода со слабой особенностью в ядре, которое однозначно и, безусловно, разрешимо в требуемом классе функций.

По найденному $v(y)$ из (6) можно определить $\tau(y)$ и решение задачи (1)-(4) в области D^- по формуле (5), а в области D^+ по формуле (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрегов М.Х. Некоторые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для одного уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 1. – С. 3-6.
2. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Внутреннекраевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – № 5. – С. 5-14.
3. Елеев В.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для смешанного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Математическое моделирование и краевые задачи: труды Всероссийской научной конференции. – Самара, 2004. – С. 91-94.
4. Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения <<abre67.wmf>> // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т. 12, № 1. – С. 79-88.
5. Кумыкова С.К. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 81-90.
6. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 50-65.
7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М., 2006. – 287с.
8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 1140-1149.
9. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1974. – 155 с.
10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.