«Технические науки и современное производство», Франция (Париж), 14-21 октября 2012 г.

Физико-математические науки

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-y''(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^2\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\quad a>0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases}\left[a_{11}\cdot y'(0)+a_{12}\cdot y(0)\right]\cdot\lambda+\left[a_{13}\cdot y'(0)+a_{14}\cdot y(0)\right]=0,\\ \left[a_{21}\cdot y'(\pi)+a_{22}\cdot y(\pi)\right]\cdot\lambda+\left[a_{23}\cdot y'(\pi)+a_{24}\cdot y(\pi)\right]=0,\end{cases} \tag{2}$$

где λ – спектральный параметр,

$$a_{1m}\in C,\quad a_{2m}\in C$$
$$(m=1,2,3,4,)$$
$$a_{11}^2+a_{12}^2\ne 0$$

либо $a_{21}^2+a_{22}^2\ne 0$ (λ входит в граничные условия), $q(x)\in L_1[0;\pi]$.

Теорема 1. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2) в случае $a_{11}=a_{21}=0, a_{12}\ne 0, a_{22}\ne 0$ имеет следующий вид:

$$s_k=\frac{k}{a}+\frac{d_{1k}}{ak}+\frac{d_{2k}}{ak^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^3}\right),\quad k=1,2,3,\ldots, \tag{3}$$

где

$$d_{1k}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\int_0^\pi q(t)dt-\int_0^\pi q(t)\cos(2kt)dt+2\cdot\left(\frac{a_{13}}{a_{12}}-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)\right]; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}d_{2k}=&\frac{d_{1k}}{2\pi}\cdot\int_0^\pi(2t-\pi)\cdot q(t)\sin(2kt)dt+\frac{(b_{13}+b_{23})\cdot ia}{2\pi}\cdot\int_0^\pi q(t)\sin(2kt)dt-\\&-\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^\pi q(t)\cdot\left(\int_0^t q(\zeta)\cdot\left[\cos(2k\zeta)-\cos(2kt)+\cos(2k\zeta-2kt)\right]\cdot d\zeta\right)dt,\ldots\end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 2. Асимптотика собственных функций $y_k(x, s)$ дифференциального оператора (1)–(2), нормированных условием

$$\int_0^\pi y_k^2(x,s)dx=1$$

в случае $a_{11}=a_{21}=0, a_{12}\ne 0, a_{22}\ne 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}y_k(x,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\Bigg\{&\sin(kx)+\frac{1}{k}\cdot\Bigg[d_{1k}\cdot x\cdot\cos(kx)-\frac{a_{13}}{a_{12}}\cdot a^2\cdot\cos(kx)-\frac{1}{2}\cos(kx)\cdot\int_0^x q(t)dt+\\&+\frac{1}{2}\cdot\int_0^x q(t)\cdot\cos(k(2t-x))dt-\frac{1}{4\pi}\sin(kx)\cdot\int_0^\pi q(t)\cdot(t-\pi)\sin(2kt)dt\Bigg]+\underline{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Теоремы 1 и 2 доказываются методами главы 5 монографии [1].

Список литературы

1. Митрохин С.И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. – М.: ИНТУИТ, 2009. – 364 с.