Физико-математические науки

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СТОКСА

Куттыкожаева Ш.Н., Наурызбаева А.А.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, e-mail: Shaharzat@mail.ru

В данной работе рассматриваются некоторые итерационные схемы для уравнения Навье-Стокса. Доказывается скорость сходимости решения итерационного метода.

Рассмотрим в ограниченной области Ω с границей S краевую задачу для уравнения Стокса

$$\mu\Delta \mathrm{v} - \nabla p = f, \qquad (1)$$

$$div\mathrm{v} = 0, \quad \mathrm{v}\big|_S = 0. \qquad (2)$$

Задача (1), (2) была исследована в работах [1, 2] методом фиктивных областей с продолжением по младшим коэффициентам

$$\mu\Delta \mathrm{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\mathrm{v}^\varepsilon = f, \text{ в } D \;\; div\mathrm{v}^\varepsilon = 0, \qquad (3)$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon \cdot \tau\big|_{S_1} = 0; \;\; p^\varepsilon\big|_{S_1} = 0, \qquad (4)$$

где область D, строго содержит в себе область Ω, S_1 – граница области D. На практике в качестве области D берется прямоугольник или квадрат. τ – касательный вектор к границе S_1. В [1] исследована сходимость решения задачи (3)-(4) к решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon \to 0$. Дальнейшие обозначения взяты из работы [3]. Рассмотрим разностную схему, аппроксимирующую задачу (3), (4):

$$\begin{aligned} &\mu\Delta_h \mathrm{v}_1 - p_{\bar{x}_1} - \frac{\xi_h(x)}{\varepsilon}\mathrm{v}_1 = f_{1h} \;\; \text{в } Q_h, \\ &\mu\Delta_h \mathrm{v}_2 - p_{\bar{x}_2} - \frac{\xi_h(x)}{\varepsilon}\mathrm{v}_2 = f_{2h} \;\; \text{в } G_h, \\ &div_h\mathrm{v} = \mathrm{v}_{1x_1} + \mathrm{v}_{2x_2} = 0 \;\; \text{в } \omega_h, \end{aligned} \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_2\bar{x}_1\big|_{\partial Q_h^1} = \mathrm{v}_1\bar{x}_1\big|_{\partial Q_h^3} = 0; \\ &\mathrm{v}_1\big|_{\partial Q_h^2} = \mathrm{v}_1\big|_{\partial Q_h^4} = 0; \\ &\mathrm{v}_2 x_2\big|_{\partial G_h^1} = \mathrm{v}_2\bar{x}_2\big|_{\partial G_h^3} = 0, \\ &\mathrm{v}_2\big|_{\partial G_h^2} = \mathrm{v}_2\big|_{\partial G_h^4} = 0, \quad p\big|_{\gamma_1} = 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Рассмотрим неявную схему типа крупных частиц:

$$\frac{\mathrm{v}_1^{n+1/2} - \mathrm{v}_1^n}{\tau} = -p_{\bar{x}_1}^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\mathrm{v}_1^{n+1/2} + \mu\Delta_h \mathrm{v}_1^{n+1/2} + f_1; \qquad (7)$$

$$\frac{\mathrm{v}_2^{n+1/2} - \mathrm{v}_2^n}{\tau} = -p_{\bar{x}_2}^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\mathrm{v}_2^{n+1/2} + \mu\Delta_h \mathrm{v}_2^{n+1/2} + f_2; \qquad (8)$$

$$\frac{\mathrm{v}_1^{n+1} - \mathrm{v}_1^{n+1/2}}{\tau} = -\left(p^{n+1} - p^n\right)_{\bar{x}_1}; \quad \frac{\mathrm{v}_2^{n+1} - \mathrm{v}_2^{n+1/2}}{\tau} = -\left(p^{n+1} - p^n\right)_{\bar{x}_2}; \qquad (9)$$

$$div_h \mathrm{v}^{n+1} = \mathrm{v}_{1x_1}^{n+1} + \mathrm{v}_{2x_2}^{n+1} = 0, \quad n = 0,1,2,... \qquad (10)$$

$$\mathrm{v}_1^0 = \mathrm{v}_{01}, \quad \mathrm{v}_2^0 = \mathrm{v}_{02}, \quad p^0 = p_0. \qquad (11)$$

Теорема 1. Решение итерационного метода (7)–(11) сходится к решению задачи (5), (6).

Доказательство. Обозначим

$$\omega^{n+1} = \mathrm{v}^{n+1} - \mathrm{v};$$

$$\omega^{n+1/2} = \mathrm{v}^{n+1/2} - \mathrm{v};$$

$$q^{n+1} = p^{n+1} - p$$

Тогда для ω, q получаем уравнения

$$\frac{\omega^{n+1/2} - \omega^n}{\tau} = \mu\Delta_h \omega^{n+1/2} - \nabla_h q^n - \frac{\xi(x)}{\varepsilon}\omega^{n+1/2};$$

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}}{\tau} = \mu\Delta_h\left(q^{n+1} - q^n\right); \; div_h \omega^{n+1} = 0 \qquad (12)$$

при этом для $\omega^{n+1/2}$, ω^{n+1}, q^{n+1} – сохраняются граничные условия (6). Решение этих уравнений удовлетворяет тождествам:

$$\begin{aligned} &\left\|\omega^{n+1}\right\|^2 - \left\|\omega^n\right\|^2 + \left\|\omega^n\right\|^2 + \left\|\omega^{n+1/2} - \omega^n\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\omega^{n+1/2}\right\|^2 + \\ &+2\tau\mu\left\|\omega_x^{n+1/2}\right\|^2 + \tau^2\left(\left\|q_x^{n+1}\right\|^2 - \left\|q_x^n\right\|^2\right) = 0; \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\left\|\omega^{n+1}\right\|^2 + \left\|\omega^{n+1} - \omega^{n+1/2}\right\|^2 = \left\|\omega^{n+1/2}\right\|^2. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что

$$\tau^2\left\|q_x^n\right\|^2 \le \frac{16\mu^{22}\tau}{h^2}\left\|\omega_x^{n+1/2}\right\|^2 + 3\left\|\omega^{n+1/2} - \omega^n\right\|^2 + \frac{3\tau}{\varepsilon}\left\|\sqrt{\xi(x)}\mathrm{v}^{n+1/2}\right\|^2. \qquad (15)$$

и используя неравенство Фридрихса, имеем

$$(1-\tau\mu C_0)\left\|\omega^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|q_x^{n+1}\right\|^2\le(1-\beta)\left\|q^{n+1}\right\|^2+\left\|\omega^n\right\|^2.$$

Список литературы

1. Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса. Вестник КазГУ, сер. Мех-мат. Инф. – 1998. – №13. – С. 54–59.

2. Смагулов Ш., Темирбеков Н.М., Камаубаев К.С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2000. – Т.3, №1. – С. 57–71.

3. Самарский А.А. Теория разностных схем // Наука. – 1997. – С. 653.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Митрохин С.И.

НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, e-mail: Mitrokhin-sergey@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$y^{(4)}(x)+q(x)\cdot y(x-\tau)=\lambda\cdot a^4\cdot y(x),\quad 0\le x\le\pi,\ a>0,\quad \tau>0,\tag{1}$$

причём

$$y(x-\tau)=y(0)\cdot\phi(x-\tau),\quad x\le\tau,\quad \phi(0)=1,\tag{2}$$

где τ – запаздывание; λ – спектральный параметр; потенциал $q(x)$ – суммируемая функция на отрезке $[0;\pi]$: $q(x)\in L_1[0;\pi]$, начальная функция $\varphi(x)$ – суммируемая функция на отрезке $[-\tau;0]$: $\varphi(x)\in L_1[-\tau;0]$.

Пусть $\lambda=s^4$, $s=\sqrt[4]{\lambda}$ – некоторая ветвь (зафиксируем её условием $\sqrt[4]{1}=+1$), пусть

$$w_k^4=1\quad\left(w_k=e^{\frac{2\pi i}{4}\cdot(k-1)},\quad k=1,2,3,4\right)$$

Методами, изложенными в работе [1], доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. Решение $y(x,s)$ дифференциальное уравнение (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot e^{aw_ksx}-\frac{1}{4a^3s^3}\cdot\sum_{k=1}^{4}w_4\cdot e^{aw_ksx}\cdot\int_0^x q(t)e^{-aw_kst}\cdot y(t-\tau)\cdot dt.\tag{3}$$

Применяя к (3) метод последовательных приближений Пикара и используя (2), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. В случае $\tau\in(\pi;+\infty$ общее решение дифференциального уравнения (1)-(2) имеет следующий вид:

$$\frac{y^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot\left\{w_k^m\cdot e^{aw_ksx}-\frac{1}{4a^3s^3}\cdot\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^x q(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\phi(t-\tau)dt\right\},\quad m=0,1,2,3.\tag{4}$$

Теорема 3. В случае $\tau\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ общее решение дифференциального уравнения (1)-(2) имеет следующий вид:

$$\frac{y^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=\sum_{k=1}^{4}C_k\cdot\left\{w_k^m\cdot e^{aw_ksx}-\frac{A_{3k}^m(x,s)}{4a^3s^3}+\frac{A_{6k}^m(x,s)}{16a^6s^6}\right\},\quad m=0,1,2,3\tag{5}$$

причём

$$A_{3k}^m(x,s)=\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st}\cdot dt_{qkk_1}\cdot e^{-aw_ks\tau},\quad k=1,2,3,4;$$
$$A_{6k}^m(x,s)=w_k\cdot\sum_{k_1=1}^{4}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot e^{-aw_ks\tau}\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st}\left(\int_0^{t-\tau}q(\zeta)e^{-aw_ks\zeta}\times\right.\tag{6}$$
$$\left.\times\phi(\zeta-\tau)\cdot d\zeta\right)dt_{qkk_1\phi_k};\quad y_k(0,s)=1;\quad y_k^{(m)}(0,s)=(as)^m\cdot w_k^m,\quad m=0,1,2,3.$$