УДК 539.3(043.3)

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Умбетов У., Сейтмуратов А.Ж.

Университет «Болашак», Кызылорда, e-mail: uumbetov@mail.ru

Получены частотные уравнение собственных колебаний двухслойной пластинки при заданных механических и геометрических характеристик являющимися основными элементами сейсмостойкости строительных конструкций. Задача решена приближенным методом получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции.

Ключевые слова: сейсмостойкость строительных конструкции, частотные уравнения собственных колебаний, метод частотных уравнений, метод декомпозиции

DECOMPOSITION APPROACH TO MODELING SEYSMOSTOIKOSTI BUILDING STRUCTURES

Umbetov U., Seitmuratov A.J.

University «Bolshak», Kyzylorda, e-mail: uumbetov@mail.ru

Obtain the frequency equation of natural vibrations of the plate layer are the main elements of the seismic stability of building structures. The problem is solved by the method of obtaining the approximate frequency equations based on the decomposition method

Keywords: seismic stability of building designs, the frequency equations of own fluctuations, a method of the frequency equations, a decomposition method

Задача сейсмостойкости строительной конструкции в ряде случаев может быть сведена к исследованию прочностных характеристик используемых материалов под нагрузками колебательного характера.

Изучение их составляет предмет общей теории колебаний и теории волн, получивших в настоящее время широкое развития.

Результаты данных исследований приносит огромную пользу при рассмотрении стационарных, нестационарных колебательных и волновых процессов в таких разделах науки гидродинамика. геофизика.

Полученные результаты относились к классу краевых задач, когда два из противоположных края прямоугольной пластинки шарнирно опёрты, а два других края имеют другие условия закрепления или свободны от напряжений.

Если все четыре края прямоугольного плоского элемента строительной конструкции произвольно закреплены, то получить точные частотные уравнения не представляются возможным.

Для таких задач можно успешно применять приближённый метод получения частотных уравнений на основе метода декомпозиции, развитого в работах профессора Г.И. Пшеничного [1] для задач статики.

Рассмотрим ряд задач колебания плоских прямоугольных элементов при произвольных граничных условиях по краям элемента с целью определения частот собственных колебаний методом декомпозиции.

Изложим постановку метода на случай плоского элемента, когда материал элемента упруги. В дальнейшем метод будем применять и для элементов из вязкоупругого материала.

В случае плоского элемента из упругого материала приближённое уравнение поперечного колебания четвёртого порядка [4] запишем в виде

$$\Delta^2 W - D_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W + D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} + D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты D_0, D_1, D_2 определяются геометрией и свойствами материала плоского элемента.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$W = \exp\left(i \frac{b}{h}\right) W_0(x, y). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнения (1), для W_0 получаем уравнение

$$\Delta^2 W_0 + D_0 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \xi^2 \Delta W_0 + \xi^2 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left[D_1 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \xi^2 - D_2 \right] W_0 = 0. \quad (3)$$

Для применения метода декомпозиции удобнее ввести новые независимые и зависимые переменные [2]

$$\alpha = \frac{\pi}{l_1}x; \qquad \beta = \frac{\pi}{l_2}y; \qquad W_0 = \frac{l_1^4}{\pi^4}v; \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2}; \qquad \lambda_1 = \frac{l_1}{\pi h}$$

В переменных (4) уравнение (3) принимает вид

$$\left[\frac{\partial^4 v}{\partial\alpha^4} + 2\lambda^2\frac{\partial^4 v}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda^4\frac{\partial^4 v}{\partial\beta^4}\right] + \lambda_1^2 D_0\left(\frac{b}{h}\right)^2\xi^2 \times \left[\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \lambda^2\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}\right] + \lambda_1^4\left(\frac{b}{h}\right)^2\xi^2 \times$$
$$\times\left[D_1\left(\frac{b}{h}\right)^2\xi^2 - D_2\right]v = 0. \quad (5)$$

Метод декомпозиции в теории колебания в общей постановке сводится к следующему.

Формулируется постановка вспомогательных задач.

Задача 1. Найти решение уравнение

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial\alpha^4} = f^{(1)}(\alpha,\beta) \quad (6)$$

при граничных условиях

$$L_1(\alpha,\beta) = 0; \qquad L_2(\alpha,\beta) = 0; \qquad (\alpha = 0;\pi). \quad (7)$$

Задача 2. Найти решение уравнения

$$\lambda^4\frac{\partial^4 v_2}{\partial\beta^4} = f^{(2)}(\alpha,\beta) \quad (8)$$

при граничных условиях

$$L_3(\alpha,\beta) = 0; \qquad L_4(\alpha,\beta) = 0; \qquad (\beta = 0;\pi). \quad (9)$$

Граничные условия на краях пластинки зависят от условий её закрепления или на свободном крае от напряжений.

Оставшаяся часть уравнения (5)

$$2\lambda\frac{\partial^4 v_3}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda D_0\left(\frac{b}{h}\right)^2\xi^2\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial\alpha^2} + \lambda^2\frac{\partial^2 v_3}{\partial\beta^2}\right) + \lambda_1^4 D_0\left(\frac{b}{h}\right)^2 \times \xi^2\left[D_1\left(\frac{b}{h}\right)^2\xi^2 - D_2\right]v_3 +$$
$$+ f^{(1)}(\alpha,\beta) + f^{(2)}(\alpha,\beta) = 0, \quad (10)$$

где $f^{(j)}(\alpha,\beta)$ произвольные функции, вид которых зависит от решаемых краевых задач.

Следуя методу декомпозиции будем считать, что

$$v_3 = \frac{1}{2}[v_1 + v_2] \quad (11)$$

и условие должно выполняться в заданных точках плоского элемента.

Общие решения уравнений вспомогательных задач (6) и (8) имеют вид

$$v_1 = f_1(\alpha,\beta) + \frac{\alpha^3}{6}\phi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2}\phi_2(\beta) + \alpha\phi_3(\beta) + \phi_4(\beta);$$
$$v_1 = f_1(\alpha,\beta) + \frac{\beta^3}{6}\psi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2}\psi_2(\alpha) + \beta\psi_3(\alpha) + \psi_4(\alpha); \quad (12)$$

где φ_j, ψ_j произвольные функции аргументов и определяются из граничных условий (7) и (9).

В дальнейшем произвольные функции в общем виде представим как

$$f^{(j)}(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{n,m}^{(j)}\sin(\alpha n)\sin(\beta m), \quad (13)$$

где $a_{n,m}^{(j)}$ произвольные постоянные, а функции $f_i(\alpha,\beta)$ в общих решениях (12) равны

$$f_1(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(j)}}{n^4}\sin(\alpha n)\sin(\beta m);$$

$$f_2(\alpha,\beta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(2)}}{m^4}\sin(\alpha n)\sin(\beta m). \quad (14)$$

Используя частные решения задач при заданных граничных условиях и используя приближённые представления (11), для нахождения неизвестных $a_{n,m}^{(j)}$ получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений, нетривиальное решение которых приводит к частотному уравнению.

Проиллюстрируем метод декомпозиции на ряде частных краевых задач колебания плоского элемента.

Задача 1. Рассмотрим простейшую задачу, когда все края шарнирно опёрты. Данная задача решалась прямым методом и получено частотное уравнение, где необходимо положить время релаксации равным бесконечности.

$$B_0\xi^4+\frac{2B_0}{\tau_0}\xi^3+\left(1+\frac{B_0}{\tau_0^2}+B_1\gamma\right)\xi^2+\frac{1}{\tau_0}(1+B_1\gamma)\xi+B_2\gamma^2=0, \qquad (14\ \text{а})$$

где коэффициенты B_j; τ_0; γ равны

$$B_0=\frac{7-8\nu}{12(1-\nu)};\quad B_1=\frac{2(2-\nu)}{3(1-\nu)};$$

$$B_2=\frac{2}{3(1-\nu)};$$

$$\tau_0=\frac{b\tau}{h};\quad \gamma=\pi^2\left[\left(\frac{nh}{l_1}\right)^2+\left(\frac{mh}{l_2}\right)^2\right], \qquad (14\ \text{б})$$

при этом τ_0 – безразмерное время релаксации; ν – коэффициент Пуассона материала пластики; γ – безразмерный параметр, характеризующий геометрические размеры пластинки.

Граничные условия имеют вид

$$v_1=\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2}=0 \qquad (\alpha=0;\pi);$$
$$v_2=\frac{\partial^2 v_2}{\partial\beta^2}=0 \qquad (\beta=0;\pi), \qquad (15)$$

удовлетворяя которым общие решения (12), получим

$$v_1=f_1(\alpha,\beta);\qquad \lambda^4 v_2=f_2(\alpha,\beta) \qquad (16)$$

или частные решения равны

$$\phi_j(\beta)=\psi_j(\alpha=0)\qquad j=(1,\dots,4).$$

Удовлетворения решения (16) условиям (11) и уравнению (10), для частоты ξ вновь получаем уравнение (14 а).

Таким образом, приближённый метод декомпозиции даёт тот же результат, что и точный прямой метод. Следовательно, метод декомпозиции можно с достаточной степенью достоверности применять при решении и других краевых задач.

Задача 2. Жёстко закреплённая пластинка по краям. Граничные условия имеют вид

$$v_1=\frac{\partial v_1}{\partial\alpha}=0 \qquad (\alpha=0;\pi);$$
$$v_1=\frac{\partial v_2}{\partial\beta}=0 \qquad (\beta=0;\pi). \qquad (17)$$

Используя общие решения (12) и граничные (17), для искомых величин v_1, v_2 получаем выражения

$$v_1=f_1(\alpha,\beta)-\frac{\alpha^3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^3}\left[1+(-1)^n\right]\sin(\beta m)+$$
$$+\frac{\alpha^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^3}\left[2+(-1)^n\right]\sin(\beta,m)-\alpha\frac{\alpha^3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^3}\sin(\beta m);$$

$$v_2=f_2(\alpha,\beta)-\frac{\beta^3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{m^3}\left[1+(-1)^m\right]\sin(\alpha m)+$$
$$+\frac{\beta^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{m^3}\left[2+(-1)^m\right]\sin(\alpha m)-\beta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{n,m}^{(1)}}{m^3}\sin(\alpha n). \qquad (18)$$

Ограничимся первыми коэффициентами в рядах произвольных функций (13) и условием $v_1=v_2$; $(\alpha,\beta)=\dfrac{\pi}{2}$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\left[a_{1,1}^{(1)}+\lambda^{-4}a_{1,1}^{(2)}\right]\left\{\lambda^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{(2-\gamma)}{2}\lambda_1^2\xi^2\left[\frac{2}{\pi}-1+\lambda^2\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\lambda_1^4\xi^2\left[\frac{(7-8v)}{8}\xi^2-\frac{3(1-v)}{2}\right]\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right\}=0; \qquad (19)$$

$$a_{1,1}^{(1)}=\lambda^{-4}a_{1,1}^{(2)}.$$

Нетривиальное решение системы (19) к частотному уравнению

$$\lambda_1^4\frac{(7-8v)}{8}\xi^4-\frac{\lambda_1^2}{2}\left[3-(1-v)\lambda_1^2+(2-v)\left(2-\frac{1}{\pi}\right)(1+\lambda^6)\right]\xi^2++\left[2\lambda^2\left(1-\frac{1}{\pi}\right)+(1+\lambda^4)\right]=0. \quad (20)$$

Задача 3. Края пластинки $\beta = 0;\ \beta = \pi$ жёстко закреплены, а края $\alpha = 0;\ \alpha = \pi$ свободны от напряжений, т.е. имеем граничные условия

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial\alpha^2}+Q_0 v_1=0;$$

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial\alpha^3}=0,\ (\alpha=0;\pi)$$

$$Q_0=\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\left[2\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\lambda_1^2\xi^2\right]; \quad (21)$$

$$v_2=\frac{\partial v^2}{\partial\beta}=0\quad(\beta=0;\pi).$$

Решение задачи для определения v_2 имеет вид (18).

Для нахождения неизвестной функции v_1 из граничных условий

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial\alpha^3}=0 \text{ при } \alpha=0;\pi$$

получаем

$$\phi_1=-\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}\right|_{a=0};\ \phi_1=-\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}\right|_{a=\pi}; \quad (22)$$

которые выполнимы при $n = 2q$, т.е. нечётные значения неизвестных $a_{n,m}^{(1)}$ необходимо положить равными нулю.

Условия (21) при $\alpha = 0;\ \pi$ приводят к системе

$$\begin{cases}[\pi\phi_1+\phi_2]+\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\left[\left(\frac{\pi^3}{6}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\beta^2}+\frac{\pi^2}{2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\beta^2}+\pi\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\beta^2}\right)+\lambda_1^2\xi^2\left(\frac{\pi^3}{6}\phi_1+\frac{\pi^2}{2}\phi_2\pi\phi_3+\phi_4\right)\right]\\ \phi_2=-\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\left(\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\beta^2}+\lambda_1^2\xi^2\phi_4\right)\end{cases} \quad (23)$$

Два уравнения (23) связывают три неизвестные функции. Так как ищем частные решения задач, то не ограничивая общности, неизвестную функцию φ_3 можно положить равной $\varphi_3 = 0$

Из системы (23) получаем уравнение для φ_4

$$\frac{\partial^4\phi_4}{\partial\beta^4}+2\lambda_1^2\xi^2\frac{\partial^2\phi_4}{\partial\beta^2}+\lambda_1^4\xi^4\phi_4=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{7-4v}{3-2v}\right)^2\left\{\pi\left[1+\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\frac{\pi^2}{6}\lambda_1^2\xi^2\right]\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}+\right. \quad (24)$$
$$\left.+\frac{\pi^3}{6}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\left.\frac{\partial^5 f_1}{\partial\alpha^3\partial\beta^2}\right|_{\alpha=\pi}\right\},$$

частное решение которого равно

$$\phi_4=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{2q,m}^{(1)}A_{q,m}^{(1)}\sin(\beta m), \quad (25)$$

где $$A_{q,m}^{(1)}=\frac{(m^2-1)}{2q}\left(m^4-2m^2\lambda_1^2\xi^4\right)^{-1}. \quad (26)$$

Ограничиваясь первыми слагаемые $a_{2,1}^{(1)};\ a_{1,1}^{(2)}$, как и в предыдущей задаче получаем частотное уравнение

$$\frac{\pi^2}{192}\lambda_1^4(7-8v)\xi^4-\left\{\left(\frac{2-v}{2}\right)\lambda_1^2\left[\left(\frac{\pi^2}{24}-1\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\lambda^2\pi^2\left(2-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)}{24\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}\right]-\frac{3(1-v)}{48}\lambda_1^4\pi^2\right\}\xi^2+ \qquad (27)$$
$$+\left\{\lambda^2\left[\frac{\pi^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}{24\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}-1\right]+\left[1-\lambda^4\frac{\pi^3}{48\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}\right]\right\}=0.$$

Задача 4. Края пластинки ($\beta = 0; \pi$); $\alpha = 0$ жёстко защемлены, а край $\alpha = \pi$ свободен от напряжений.

В этой задаче искомая функция v_2 определена в предыдущих задачах, а v_1 равна

$$v_1 = f_1(\alpha,\beta)+\frac{a^3}{6}\phi_1(\beta)+\frac{a^2}{2}\phi_2(\beta)+a\phi_3\beta;$$
$$\phi_4 = 0;\quad \phi_1=-\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}\right|_{a=\pi};\qquad \phi_3=-\left.\frac{\partial f_1}{\partial a}\right|_{a=0};\qquad (28)$$

где

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\beta^2}+\left[1+\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\frac{\pi^2}{2}\lambda_1^2\xi^2\right]\phi_2=$$
$$=\left[\pi\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}\right|_{a=\pi}+\frac{\pi^3}{6}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\left.\frac{\partial^5 f_1}{\partial a^3\partial\beta^2}\right|_{a=\pi}+\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\pi\left.\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}\right|_{a=\pi}+\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\pi\lambda_1^2\xi^2\left.\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}\right|_{a=0}\right. \qquad (29)$$

Отсюда частотное уравнение

$$\lambda^2\left[\left(1+\frac{\pi}{2}-B_1+C_1\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right)\right]+\frac{(2-v)}{2}\lambda_1^2\xi^2\left\{\left[\left(B_1-\frac{\pi}{2}-1\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-C_1\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\lambda^2\left[-\left(1-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi^2}{8}B_1\right)+C_1\left(\frac{2}{\pi}-1\right)\right]\right\}+ \qquad (30)$$
$$+\lambda_1^4\xi^2\left[\left(\frac{7-8v}{8}\right)\xi^2-\frac{3}{2}(1-v)\right]\left[\left(1-\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{48}B_1\right)+C_1\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\left(1+C_1\lambda^4\right)=0;$$

где B_1, C_1 равны

$$B_1=\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^3}{6}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)-\pi\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)+\pi\lambda_1^2\xi^2\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\right]\times$$
$$\times\left[1+\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\lambda_1^2\xi^2-\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{3-2v}{7-4v}\right)\right]^{-1}; \qquad (31)$$
$$C_1=\left(1-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi^2}{8}B_1\right)\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

Частотное уравнение (30) определяет три частоты в отличие от предыдущих, что связано, по-видимому, с тем, что край $a = \pi$ свободен то напряжений и происходит отражение волн от края $a = 0$, жёстко закреплённого.

Таким образом, в работе показано, что для шарнирно закреплённого прямоугольного плоского элемента метод декомпозиции даёт точное решение поставленной задачи по сравнению результата полученное прямым методом.

Результаты исследования показывает, что приближённый метод декомпозиции позволяет находить частоты собственных колебаний пластинки при заданных механических и геометрических характеристик. Механические и геометрические характеристики является основными элементами сейсмостойкости многих строительных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничнов Г.И. Метод декомпозиции решения уравнения и краевых задач. – М.: ДАН. СССР, 1985. – Т. 282, №4. – С. 792–794.

2. Пшеничнов Г.И. Решение некоторых задач строительной механики методом декомпозиции // Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. – №4. – С. 12–17.

3. Сейтмуратов А.Ж. Динамическая устойчивость плоских элементов в строительных конструкциях // Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте. – Самара: СГАСУ, 2005.

4. Сейтмуратов А.Ж. Приближенный метод декомпозиций в теории колебания прямоугольных пластин // Актуальные проблемы механики и машиностроения. – Алматы: КазНТУ, 2005.