УДК 548.1

ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ, УПОРЯДОЧЕННЫХ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА СЕТКАХ КЕПЛЕРА-ШУБНИКОВА

Иванов В.В., Таланов В.М.

Южно-Российский государственный технический университет, Новочеркасский политехнический институт, Новочеркасск, e-mail: valtalanov@mail.ru

Известны замкнутые фрактальные кривые, которые могут быть получены методом итераций, заданных соответствующим генератором, длина которых при бесконечном выполнении итерационного закона становится бесконечной, а их площадь хотя и изменяется, тем не менее принимает определенное конечное значение (например, снежинка Коха, построенная на треугольнике) [1, 2]. Заполнение такими фракталами двумерного пространства происходит в том случае, если они получены на определенной двумерной сетке (например, двухцветной сетке Кеплера-Шубникова).

Ключевые слова: замкнутые фрактальные кривые, мультифрактальные множества, двумерное пространство, сетки Кеплера-Шубникова

CREATION OF MULTIFRACTAL FLOCKS OF THE CLOSED CURVES REGULATED IN TWO-DIMENSIONAL ROOM ON NETS OF KEPLER-SHUBNIKOVA

Ivanov V.V., Talanov V.M.

The South Russian state engineering university, Novocherkassk polytechnic institute, Novocherkassk, e-mail: valtalanov@mail.ru

Closed fractal curved lines which one can be received a method of the iterations set by the appropriate generator which one length at endless execution of the iterative law becomes endless, and their square are known though variates, nevertheless accepts a certain terminal value (for example, Kokh's builted on a triangular) [1, 2] the snowflake. Filling-up with such fractals of two-dimensional room descends in the event that they are received on a certain two-dimensional net (for example, Kepler-Shubnikova two-tone net).

Keywords: closed fractal curved lines, multifractal flocks, two-dimensional room, Kepler-Shubnikova nets

Процедура формирования генератора G на отрезке – стороне многоугольника $\{Pg\} = \{N\}$– задается законом T_k: $G = L_{K(1/l)}$ а процедура получения фрактальной кривой – итерационным законом T_i. Тогда фрактальная кривая n-го поколения:

$$F_{\{Pg\},\,n} = G(T_{i=n}) = F_{K(1/l)}\ \{Pg\}_n\ (G^2{}_2),$$

где K – коэффициент самоподобия, n – количество итераций (значение $n = 0$ соответствует исходному многоугольнику, $n = 1$ – генератору), $G^2{}_2$ – симметрия фигуры, образованной замкнутой фрактальной кривой.

Рассмотрим некоторые свойства множеств генерируемых замкнутых фрактальных кривых вида $F_{K(1/l)}\ \{Pg\}(T - G^2{}_2)$, образующихся на одноцветных и двухцветных 2D сетках.

Замкнутые фрактальные кривые с генератором $L_K(3/4)$ обладают следующими свойствами [1, 2]:

1) длина кривой на i-м шаге итерации $L_{F\{N\},n} = (1/l)^n\ L_{\{N\},0}$;

2) площадь кривой, построенной на многоугольнике $\{N\}$ со стороной a и площадью $S_{\{N\},0}$ зависит от количества итераций n, т.е.

$$S_{F\{N\},i} = S_{\{N\},0} \pm 3^{1/2}\ (a/6)^2\ \Sigma\infty_{i=0}\ (4K)^i,$$

где знаки ± указывают на два возможных варианта изменения площади многоугольника $\{N\}$ при итерации,

3) размерность кривой D определяется из уравнения $N = (1/l)^D$, где генератор $1/l = 4/3$, следующим образом:

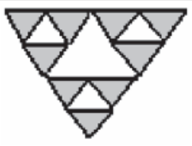
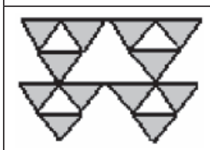
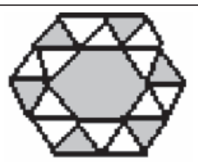
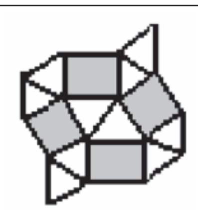
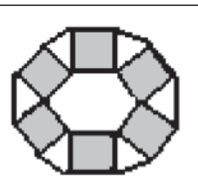
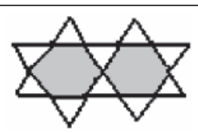
$$D = \ln 4/\ln 3 = 1{,}2618 > 1.$$

Множества замкнутых фрактальных кривых $MF_{K(4/3)}\{Pg\}(G^2{}_2)$, построенные на периметре $\{N\}$-тел (темных $\{Pg\}$) сетки Кеплера-Шубникова, образуют совокупности фигур, представляющие собой упаковки определенных снежинок Коха в двумерном пространстве. Множества замкнутых фрактальных кривых $MF_{\bar{K}(4/3)}\ \Sigma\{Pg\}(G^2{}_2)$, построенные на периметре $\{N\}$-лакун (светлых $\{Pg\}$), образуют совокупность лакунарных фигур, дополняющую соответствующие множества $MF_{K(4/3)}\{Pg\}(G^2{}_2)$ до двумерного пространства.

Отметим, что в случае треугольных лакун генерируемое с помощью генератора Коха множество лакунарных кривых представляет собой результат его расслоения на мультимножество кривых $MF_{K(4/3)}\Sigma\{3\}(G^2{}_2)$, каждая из которых состоит из определенного множества самоподобных (с коэффициентом подобия 2/9) замкнутых кривых в виде двух сросшихся с частичным наложением снежинок Коха $F_{K(4/3)}\{3\}$(p6mm).

Отметим, что конфигурация и основные геометрико-топологические характеристики образующихся мультимножеств замкнутых лакунарных кривых полностью определяются соответствующими характеристиками двухцветных сеток Кеплера-Шубникова [3], содержащими светлые треугольники ({3}-лакуны) (таблица).

Характеристики некоторых структур из фрактальных кривых, полученных на двухцветных сетках Кеплера-Шубникова, содержащих тригоны

Сетка Кеплера и ее симметрия	Характеристика сетки Кеплера-Шубникова		Характеристика структур из фрактальных кривых	
	Форма фрагмента	Код 2D структуры	$F_{K(4/3)}\{Pg\}(G^2_2)$ из {Pg}-тел	$MF_{\bar{K}(4/3)}\Sigma\{Pg\}(G^2_2)$ из {Pg}-лакун
333333 (p6mm)		$P\{3^6\}(3(3))(p3m1)$	Плотная упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{3\}(p6mm)$	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}\{3\}(p3m1)$
		$P\{3^6\}(1(3)\text{-}2(2))(p3)$	Пористая упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{3\}(p6mm)$	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}\{3\}(p3m1)$ и $Mf_{\bar{k}(4/3)}\,4\{3\}(p3m1)$ (1:1)
		$P\{3^6\}(1(3)\text{-}2(2))(pm)$	Пористая упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{3\}(p6mm)$	
33336 (p6)		$P\{3^46\}(6(1)+3(1))(p6)$	Упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{3\}(p6mm)$ и $F_{k(4/3)}\{6\}(p6mm)$ (2:1)	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}2(3\}(p2mm)$
34334 (p4gm)		$P\{3^34^2\}(4(2))(p4gm)$	Упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{4\}(p4mm)$	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}\,2\{3\}(p2mm)$
3464 (p6mm)		$P\{34^26\}(4(2))(p6mm)$	Пористая упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{4\}(p4mm)$	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}\{3\}(p3m1)$ и $Mf_{\bar{k}(4/3)}\{6\}(p6mm)$ (2:1)
3636 (p6mm)		$P\{3^26^2\}(6(2))(p6mm)$	Плотная упаковка снежинок коха $F_{k(4/3)}\{6\}(p6mm)$	Упорядоченное множество мультифракталов $Mf_{\bar{k}(4/3)}\{3\}(p3m1)$

Некоторые характеристики фрактальных структур, изоморфных соответствующим сеткам Кеплера-Шубникова, также представлены в таблице. Канторово множество точек M, общих для смежных фрактальных кривых, и само множество фрактальных кривых имеют одинаковую мощность, равную мощности континуума [2].

Проанализируем мультифрактальные множества кривых. Изоморфные определенным сеткам Кеплера-Шубникова упорядоченные в двумерном пространстве множества фрактальных структур одновременно могут рассматриваться и как упаковки фракталов в виде определенных снежинок Коха $F_{K(4/3)}\{Pg\}(G^2_2)$, и как упорядоченные множества лакунарных мультифракталов $MF_{\bar{K}(4/3)}\{3\}(p3m1)$ или $MF_{\bar{K}(4/3)}2\{3\}(p2mm)$.

Отметим, что для всех представленных выше упорядоченных множеств лакунарных фрактальных кривых характерны ажурные решеточные конструкции, структурным элементом которых являются самоподобные фракталы.

Размерность лакунарных структур, образующихся внутри тригонов, может быть определена следующим образом:

$$\mathrm{Dim}\,F^{(2)} = \lim_{i\,6\,\infty} k^{1/2}\,\Sigma S_i.$$

Для множеств фрактальных кривых

$$MF_{\bar{K}(4/3)}\{3\},\ MF_{\bar{K}(4/3)}2\{3\} \text{ и } MF_{\bar{K}(4/3)}4\{3\}$$

относительные площади поверхности, занятые лакунами, соответственно равны

$$\Sigma S_i = 3\Sigma 2^{i-1}k^i,\ \Sigma S_i = 5k + \Sigma 2^{i-2}k^{i-1}$$
$$\text{и } \Sigma S_i = 8k + 3\Sigma 2^{i-4}k^{i-1}$$

с коэффициентом самоподобия $k = 1/9$.

Для косынки Серпинского $F_{3\{3\},3(г),1/3}$ и производных от нее двух фрактальных структур гомологической серии $F_{(3+3n)\{3\},\,I,\,1/(2+n)}$ при $n = 1$ и 2 лакунарная размерность определяется проще:

$$\mathrm{Dim}\,F^{(2)} = k^{1/2}\,\Sigma S_i,$$

где относительные площади поверхности, занятые лакунами, соответственно равны:

$$\Sigma S_i = \Sigma 3^{i-1}k^i\ (k = 1/4),$$
$$\Sigma S_i = 3\Sigma 6^{i-1}k^i\ (k = 1/9)$$
$$\text{и } \Sigma S_i = 6\Sigma 10^{i-1}k^i\ (k = 1/16).$$

Сравнительным анализом спектров установлено подобие лакунарных характеристик множеств фрактальных кривых $MF_{\bar{K}(4/3)}\{3\}$, $MF_{\bar{K}(4/3)}2\{3\}$ и $MF_{\bar{K}(4/3)}4\{3\}$ с фрактальной структурой $F_{6\{3\},\,I,\,1/3}$, производной от классической косынки Серпинского.

Можно предположить, что предельное значение размера производных лакун, в которых еще может разместиться минимальная структурная единица вещества (атом), составляет величину порядка 0,1 нм [4]. Тогда в предположении, что инициальная лакуна имеет размер не более 1 мкм, физическими фракталами могут быть предфракталы не выше 4-го поколения (для классической салфетки Серпинского – не выше 6-го поколения).

Таким образом, с помощью метода итерационного модулярного дизайна получены *серии мультифрактальных кривых* (на основе некоторых сеток Кеплера-Шубникова), обладающих свойствами канторова множества. Определены основные характеристики фрактальных структур и их лакунарных спектров, которые представляют интерес в связи с определением вероятных распределений по размерам микро- и наночастиц, захваченных в процессе роста основной поверхностной фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фракталы в физике; под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тозатти. – М.: Мир, 1988. – 420 с.

2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.

3. Смирнова Н.Л. О сетках Кеплера-Шубникова // Кристаллография. – 2009. – Т.54, №5. – С. 789–794.

4. Sander L.M. Fractal growth // Sci. Am. – 1987. – V.256. – P. 94–100.