

УДК 621.04.18

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОК В ПРИВОДЕ МЕТАЛЛООБРАБАТЫВАЮЩЕГО СТАНКА

Лазуткина Н.А., Лазуткин С.Л.

Муромский институт, филиал ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»,
Муром, e-mail: Lazutkin62@mail.ru

Дано краткое описание подхода к вопросу моделирования нагрузок в приводе технологического оборудования на примере металлообрабатывающего станка.

Ключевые слова: динамика машин, статистическая обработка данных, теория случайных функций, модель полигауссового распределения

MODELING OF LOADS IN THE DRIVE MACHINE TOOL

Lazutkin S.L., Lazutkina N.A.

The Murom Institute of Vladimir state University, Murom, e-mail: Lazutkin62@mail.ru

A brief description of the approach to the modeling of loads in the drive technology equipment on the example of the machine tool.

Key words: dynamics of machines, statistical data processing, the theory of random functions, the model of poly Gaussian distribution

Металлообрабатывающие станки относятся к категории технологических машин, при работе которых в деталях исполнительных механизмов возникают значительные динамические нагрузки. Их теоретические исследования основаны на методах теории динамических систем, взаимодействующих с обрабатываемым материалом, изменение свойств которого носит случайно-статистический характер. Это направление имеет ряд принципиальных преимуществ. Однако громоздкость математического описания обрабатываемого материала, как объекта разрушения, а также сложность станков как динамических систем не позволяют определить аналитическим методом нагрузки, адекватно отображающие реальную нагруженность узлов и деталей. Поэтому изучение нагрузок во многих случаях осуществляется экспериментально, путем их тензометрирования в условиях эксплуатации.

Полученные таким образом данные подвергают статистической обработке с применением методов теории случайных функций. Поскольку алгоритмы оценивания вероятностных характеристик оптимизируются для определенных классов случайных функций, то возникает задача построения математической модели, достаточно точно аппроксимирующей экспериментально полученные реализации нагрузок в узлах и деталях станков. Ограничимся вопросами математического описания нагрузок, адекватно отображающего свойства реальных нагрузок относительно совокупности вероятностных характеристик, используемых при расчете зубчатых передач приво-

да исполнительного органа на усталостную долговечность. В этом случае необходимо знать следующие вероятностные характеристики расчетных нагрузок: среднее число максимумов и среднее число «нулей» в единицу времени, распределение вероятностей максимумов, совместные плотности распределения вероятности нагрузки и двух ее первых производных, совместное распределение нагрузки и ее производной, трехмерную плотность распределения вероятностей нагрузки.

В качестве статистической модели расчетных нагрузок в приводе исполнительного органа примем полигауссовый широкополосный случайный процесс. Случайный процесс называется [1] полигауссовым, если его плотность распределения вероятностей может быть представлена смесями гауссовых распределений

$$f_1(x) = \sum_n g_n \omega_n(x), \quad (1)$$

где g_n – «взвешивающие» множители, для которых выполняется условие $\sum_n g_n = 1$,

$\omega_n(x)$ – гауссова плотность распределения вероятностей n -й компоненты процесса

$$\omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left\{ -\frac{(x - a_n)^2}{2\sigma_n^2} \right\}.$$

Выбор именно этого класса случайных процессов в качестве модели нагрузок в приводе продиктован двумя соображениями. Во-первых, с помощью (1) уже при $n = 2, 3$ возможно получить семейство

кривых, достаточно точно аппроксимирующих распределения вероятностей нагрузок в приводе различных типов металлообрабатывающих станков. Во-вторых, при использовании линейной гипотезы накопления усталостных повреждений оказывается возможным, вследствие инвариантности полигауссовых моделей относительно линейных преобразований, воспользоваться результатами, полученными при разработке методов расчета на усталостную прочность при случайных напряжениях, имеющих гауссово распределение вероятностей. Это обстоятельство имеет важное значение, так как именно для гауссовых случайных напряжений получены наиболее значительные результаты при расчете на усталостную прочность.

Полагая, что нагрузки в приводе металлообрабатывающих станков имеют плотность распределения вероятностей в виде (1), найдем выражения для указанной выше системы вероятностных характеристик.

На основании методов теории стационарных случайных функций [2] имеем

$$\phi(x) = -\frac{1}{\mu_{\max}} \int_{-\infty}^0 \ddot{x} \psi_3(x, o, \ddot{x}) d\ddot{x}; \quad (2)$$

$$\mu_{\max} = -\int_{-\infty}^0 \ddot{x} \psi_2(o, \ddot{x}) d\ddot{x}; \quad (3)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}; \quad z = \frac{\frac{x_3 - x_1}{\tau_1} - \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}}{(\tau_1 + \tau_2)};$$

$$\begin{aligned} f_3\left(x - \frac{\tau_2}{2}y; x + \frac{\tau_2}{2}y; z\tau_1(\tau_1 + \tau_2) + \frac{y}{2}(\tau_2 - 2\tau_1) + x, \tau_1, \tau_2\right) = \\ = \sum_n c_n \omega_{3n}\left(x - \frac{y}{2}\tau_2; x + \frac{y}{2}\tau_2; z\tau_1(\tau_1 + \tau_2) + \frac{y}{2}(\tau_2 - 2\tau_1) + x, \tau_1, \tau_2\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Замечая, что при $\tau_1 \rightarrow 0, \tau_2 \rightarrow 0$,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x, \quad \frac{x_2 - x_1}{\tau_2} \rightarrow \dot{x},$$

$$\frac{\frac{x_3 - x_1}{\tau_1} - \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}}{(\tau_1 + \tau_2)} \rightarrow \ddot{x},$$

$$P_{3n}\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{1n} \sqrt{\gamma}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma_n} \left[\sigma_{2n}^2 (x - a_n)^2 + 2\sigma_{1n}^2 (x - a_n) \ddot{x} + \sigma_n^2 \ddot{x}^2\right] - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{1n}^2}\right\}. \quad (8)$$

$$\mu_c = \int_{-\infty}^0 |x| \psi_1(o, \dot{x}) d\dot{x}. \quad (4)$$

Здесь $\phi(x)$ – плотность распределения вероятностей максимумов нагрузки; $\mu_{\max}$ – среднее число максимумов нагрузки в единицу времени; $\psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x})$ – совместная плотность распределения вероятностей нагрузки и двух ее производных в совпадающие моменты времени; $\psi_2\left(\ddot{x}, \ddot{x}\right)$ – совместная плотность распределения вероятностей первой и второй производных нагрузок в совпадающие моменты времени; $\psi_1\left(\dot{x}, \dot{x}\right)$ – совместная плотность распределения вероятностей нагрузки и ее производной в совпадающие моменты времени; μ_0 – среднее число «нулей» нагрузки в единицу времени.

Для определения найдем выражение для трехмерной плотности распределения вероятностей нагрузки. Согласно [2] имеем

$$f_3(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2) = \sum_n c_n \omega_{3n}(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2); \quad (5)$$

$$c_n \geq 0, \quad \sum_n c_n = 1,$$

где $\omega_{3n}(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2)$ – трехмерная плотность распределения вероятностей n -й гауссовой компоненты.

Перейдем в (5) к новым переменным

$$\frac{x_3 - x_1}{\tau_1} - \frac{x_2 - x_1}{\tau_2}$$

выполним предельный переход, в результате получим:

$$\psi_3\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right) = \sum_n c_n P_{3n}\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right), \quad (7)$$

где $P_{3n}\left(x, \dot{x}, \ddot{x}\right)$ – совместная плотность распределения вероятностей n -й гауссовой компоненты и ее двух первых производных

Здесь $\gamma_n = \sigma_n^2 \sigma_{2n}^2 - \sigma_{1n}^4$.

Совместную плотность распределения вероятностей первой и второй производных

нагрузок $\Psi_2 \left(\dot{x}, \ddot{x} \right)$ найдем, проинтегрировав $\Psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x})$ по x

$$\Psi_2 \left(\dot{x}, \ddot{x} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{3n}(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx. \quad (9)$$

После подстановки (8) в (9) и интегрирования получим

$$\Psi_2 \left(\dot{x}, \ddot{x} \right) = \sum_n \frac{c_n}{2\pi\sigma_{1n}\sigma_{2n}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{1n}^2} + \frac{\ddot{x}^2}{\sigma_{2n}^2} \right) \right]. \quad (10)$$

Совместную плотность распределения вероятностей нагрузки и первой производной $\Psi_1 \left(x, \dot{x} \right)$ найдем, проинтегрировав $\Psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x})$ по $\ddot{x}$:

$$\Psi_1 \left(x, \dot{x} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_3(x, \dot{x}, \ddot{x}) d\ddot{x} = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} P_{3n}(x, \dot{x}, \ddot{x}) d\ddot{x}. \quad (11)$$

После подстановки (8) в (11) и интегрирования получим

$$\Psi_1 \left(x, \dot{x} \right) = \sum_n \frac{c_n}{2\pi\sigma_n\sigma_{1n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-a_n)^2}{\sigma_n^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{1n}^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

Теперь, зная совместные плотности распределения вероятностей, по формулам (2)–(4) найдем плотность распределения вероятностей максимумов и величин μ_0 и $\mu_{\max}$.

На основании (3) и (10), находим среднее число максимумов нагрузки в единицу времени

$$\mu_{\max} = \sum_n \frac{c_n \sigma_{2n}}{2\pi\sigma_{1n}} = \sum_n c_n \mu_{\max n}, \quad (13)$$

где $\mu_{\max n}$ – среднее число максимумов нагрузки в единицу времени n -й гауссовой компоненты.

По формулам (4) и (12) находим среднее число «нулей» нагрузки в единицу времени

$$\mu_0 = \sum_n c_n \lambda_n(0) \exp \left[-\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2} \right], \quad (14)$$

где $\lambda_n(0)$ – среднее число «нулей» в единицу времени n -й гауссовой компоненты.

По формулам (2), (7) и (8) находим плотность распределения вероятностей максимумов нагрузки

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \frac{1}{S_n} \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \left\{ \frac{\sqrt{\gamma}}{\sigma_n\sigma_{2n}} \exp \left[-\frac{\sigma_{2n}^2}{2\gamma_n} (x-a_n)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{1n}^2 \sqrt{2\pi}}{\sigma_n^2 \sigma_{2n}^2} (x-a_n) \exp \left[-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2} \right] \Phi \left(\frac{\sigma_{1n}^2}{\sigma_n \sqrt{\gamma_n}} (x-a_n) \right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\Phi(t)$ – интеграл вероятности;

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \quad S_n = \sum_n c_n \mu_{\max n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дороднов А.А., Чабдаров Ш.М. О полноте систем гауссовых функций и полигауссовых приближениях в радиотехнике // Радиотехника. – 1995. – т.30, № 7. – С. 1–7.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1986. – 728 с.

3. Мошнина Е.Н., Лазуткина Н.А. Проблемы эффективного использования энергии машиностроительного оборудования // Машиностроение и безопасность жизнедеятельности. – 2011. – №3 (10). – С. 58–61.

4. Лазуткин С.Л., Лазуткина Н.А., Игнатов С.Н. Энергобаланс технологического оборудования // Современные наукоемкие технологии. – 2004. – №1. – С. 61–62.