УДК 548.1

ФОРМИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВ ЗАМКНУТЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ, УПОРЯДОЧЕННЫХ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА СЕТКАХ КЕПЛЕРА

Иванов В.В., Щербаков И.Н., Таланов В.М.

Южно-Российский государственный технический университет, Новочеркасский политехнический институт, e-mail: valtalanov@mail.ru

Множества замкнутых фрактальных кривых, полностью заполняющих двумерное пространство, характеризуются определенными свойствами. Некоторые свойства этих мультифрактальных множеств определяются характеристиками исходных для получения двумерных сеток (в частности, лакунарные спектральные характеристики с учетом возможного расслоения подмножества, построенного на треугольниках). Законом итерации определяется размерность фрактальной кривой.

Ключевые слова: множества замкнутых фрактальных кривых, двумерное пространство, сетки Кеплера

CREATION OF FLOCKS OF THE CLOSED FRACTAL CURVED LINES REGULATED IN TWO-DIMENSIONAL ROOM ON NETS OF KEPLER

Ivanov V.V., Scherbakov I.N., Talanov B.M.

The South Russian state engineering university, Novocherkassk polytechnic institute, e-mail: valtalanov@mail.ru

Flocks of the closed fractal curved lines which completely are filling in two-dimensional room, are defined by certain properties. Some properties of these multifractal flocks are determined by characteristics initial for obtaining of two-dimensional nets (in particular, lacunary spectral characteristics with allowance for possible flaking of the subset built on triangular). The iteration law determines dimensions of a quantity of a fractal curved line.

Keywords: flocks of closed fractal curved lines, two-dimensional room, Kepler's nets

Известны замкнутые фрактальные кривые, полученные итерационным методом, длина которых при бесконечном выполнении итерационного закона также становится бесконечной, а их площадь не изменяется (например, меандр) [1–3]. Рассмотрим в общем случае замкнутые фрактальные кривые с генератором $L_K(1/l)$ [1, 2]. Данные фрактальные кривые обладают следующими свойствами:

1) длина кривой на i -м шаге генерирования (шаге фрактализации)

$$L_{\{n\},i} = L_{\{n\},0} m^{i/2}, \quad (1 < m < 2);$$

2) площадь сечения не зависит от числа шагов фрактализации, т.е. $S_{\{n\},i} = S_{\{n\},0}$;

3) размерность кривой D определяется из уравнения $N = (1/l)^D$ (где генератор $1/l = N L_{\{n\},0}/L_{\{n\},1} = N/m^{1/2}$) по следующей формуле:

$$D = [\ln N / (\ln N - 0,5 \ln m)] > 1.$$

Выше использованы следующие обозначения: $L_{\{n\}}$ и $S_{\{n\}}$ – соответственно длина и площадь сечения микрочастиц в виде правильного n -угольника, N – количество одинаковых отрезков, образующихся из каждой стороны n -угольника при одном шаге фрактализации, l – множитель, характеризующий изменение пространственного размера отрезка за один шаг.

Характеристику изменения длины фрактальной линии при $N = 4$ за один шаг фрактализации определим как

$m^{1/2} = L_{\{n\},i+1}/L_{\{n\},i} = (2/(1 - \cos \gamma))^{1/2}$, где $\gamma = (n - 2)\pi/n$ – внутренний угол правильного n -угольника. Тогда при изменении n , например, от 4 до 12 размерность линий будет закономерно изменяться от 1,333 до 1,161, а при $n \rightarrow \infty$ величина $D \rightarrow 1$.

Представляя всю поверхность как упаковку многоугольников с различными параметрами n и γ , определяем усредненную по всем q многоугольникам характеристику $\langle m^{1/2} \rangle$ следующим образом:

$$\langle m^{1/2} \rangle = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q (L_{\{n\},j,i+1}/L_{\{n\},j,i}) = \frac{1}{\cos \beta},$$

где $\beta \leq \gamma/2 = (\pi/2) - (\pi/n)$ и при любом i -м шаге фрактализации выполняется условие

$$\sum_{j=1}^q S_{\{n\},j,i} = \sum_{j=1}^q S_{\{n\},j,0} = d S_{\{n\},0}.$$

Рассмотрим сечения микрочастиц с поверхностью, представляющей собой замкнутые фрактальные линии, которые можно аппроксимировать фрактальной кривой с генератором $K(1/l)$. Если усредненные значения ширины межфазных границ и размеров микрочастиц твердых фаз определить соответственно как

$$\langle a_i \rangle = \langle L_{\{n\},i} \rangle / 4n \sin \beta$$

и

$$\begin{aligned} \langle d \rangle &= 2(S_{\{n\},0}/\pi)^{1/2} = \\ &= 4^i \langle L_{\{n\},i} \rangle / 4n \langle m^{1/2} \rangle \sin(\pi/n), \end{aligned}$$

то их отношение равно

$$\varepsilon_i = \langle a_i \rangle / \langle d \rangle = 4^{-i} \operatorname{tg} \beta \sin(\pi/n) (\cos \beta)^{(1-i)}.$$

В этом случае при $\beta \leq (\pi/4)$ и среднем значении $\langle n \rangle \geq 6$ на втором шаге фрактализации ($i = 2$) имеем $\varepsilon_2 \leq 4 \cdot 10^{-2}$, а максимальное значение параметра, характеризующего поверхностную долю межфазных границ $k_{r,s} = 2\varepsilon_2 (1 - 2\varepsilon_2) \approx 8 \cdot 10^{-2}$, что по порядку величины уже соответствует уровню, необходимому для объяснения синергизма трибологических свойств сложных по составу композиционных покрытий на основе, например, покрытий системы Ni – P [4, 5].

Параметр наноструктурности k_n и параметр $k_{r,s}$ описывают формальное уменьшение концентрации α фаз твердой компоненты покрытий либо за счет особенностей формы ультрадисперсных частиц этих фаз, присутствующих в зоне трибоконтакта и проявляющих свойства смазочного материала, либо за счет экранирования фазы смазочной компоненты твердых фаз на межфазных границах. Предположим, что отношение $(k_n / \alpha k_{r,s})$ пропорционально отношению площади поверхности твердых фаз без межфазных границ к суммарной площади межфазных границ, т.е.

$$[\alpha (1 - k_{r,s}) / k_{r,s}] \approx 10.$$

Тогда при $(k_n + \alpha k_{r,s}) \approx 0,08$ имеем (при $\alpha = 0,9$) $k_n \approx 0,07$ и $k_{r,s} \approx 0,01$.

В заключение отметим, что лакунарные спектры, соответствующие множествам упорядоченных в двумерном пространстве

замкнутых фрактальных кривых, подобны аналогичным спектрам инициальных двумерных сеток Кеплера, а сами лакунарные структуры не обладают свойствами фрактальных структур.

Таким образом, множества замкнутых фрактальных кривых, полностью заполняющих двумерное пространство, характеризуются определенными свойствами. Некоторые свойства этих мультифрактальных множеств определяются характеристиками исходных для получения двумерных сеток (в частности, лакунарные спектральные характеристики с учетом возможного расщепления подмножества, построенного на треугольниках). Законом итерации определяется размерность фрактальной кривой. Мультифрактальные множества, полученные на соответствующих множествах двумерных сеток, могут служить аппроксимантами для описания, в частности, распределения ультрадисперсных частиц фаз и особенностей конфигурации межфазных границ на поверхности материалов [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фракталы в физике / под ред. Л. Пьетронеро и Э. Тоттаги. – М.: Мир, 1988. – 420 с.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 260 с.
3. Whyte L.L., Wilson F.C., Wilson D. Hierahical Structures. N.Y.: Elsevier, 1990. – 184 с.
4. Иванов В.В., Щербаков И.Н. Моделирование композиционных никель-фосфорных покрытий с антифрикционными свойствами. – Ростов н/Д: Изд-во журн. «Иzv. вузов. Сев.-Кавк. регион», 2008. – 112 с.
5. Химическое наноконструирование композиционных материалов и покрытий с антифрикционными свойствами / И.Н. Щербаков, В.В. Иванов, В.Т. Логинов, П.Д. Дерлугян, Г.Е. Трофимов, Ф.П. Дерлугян. – Ростов н/Д: Изд-во журн. «Иzv. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки», 2011. – 132 с.