Физико-математические науки

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА

Мадыев А.П., Могнонов П.Б., Ширапов Д.Ш.

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Россия, г. Улан-Удэ

Многие измеряемые физические процессы могут рассматриваться как выходные сигналы линейных динамических систем (ЛДС) при подаче на вход стационарных случайных воздействий (ССВ) с ограниченной мощностью (дисперсией). Особый интерес представляет переходный режим от скачкообразного изменения амплитуды реализации ССВ в границах динамического диапазона. В этом случае выходной сигнал ЛДС является нестационарным сигналом, статистические характеристики которого асимптотически устремятся к новым установившимся значениям. При этом возможны значительные кратковременные расширения границ динамического диапазона (выбросы дисперсии) сигнала и его производной относительно нового установившегося значения.

Скачкообразный характер изменения воздействия близок к ударным нагрузкам. В этом смысле реакция ЛДС в переходном (неустановившемся) режиме может приближаться к экстремальной и служить оценкой сверху для взаимодействия ЛДС с нестационарным воздействием, параметры которого плавно изменяются в тех же границах. К тому же в рамках этой модели проще и удобнее более обоснованно определить априорные ограничения: с одной стороны — это динамические свойства ЛДС, с другой — динамический диапазон ССВ.

В задачах измерения и обработки подобных сигналов игнорирование выбросов и учет только установившихся значений статистических характеристик может привести к занижению частоты дискретизации цифровых алгоритмов, а в конечном итоге к значительному росту погрешности измерения/обработки. Однако выбросы в переходных режимах могут появляться не всегда, а лишь при определенных сочетаниях параметров ССВ и ЛДС.

Известно общее решение для определения корреляционной функции асимптотического нестационарного выходного сигнала ЛДС при скачке амплитуды реализации ССВ от 0 до текущего значения:

$$R_S(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-x)h(t_2-y)R_B(y-x)dxdy,$$

где h — импульсная характеристика ЛДС; R_B — автокорреляционная функция ССВ.

Производная n-го порядка реакции ЛДС характеризуется корреляционной функцией:

$$R_{Sn}(t_1,t_2)=(-1)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial t_1 \partial t_2}R_S(t_1,t_2)\ .$$

Соответствующие дисперсии имеют вид:

$$\sigma^2(t)=R_S(t_1,t_2)\big|_{t_1=t_2},\ \sigma_n^2(t)=R_{Sn}(t_1,t_2)\big|_{t_1=t_2}.$$

На практике наибольший интерес представляет закон изменения во времени дисперсии первой производной $\sigma_1^2(t)=R_{S1}(t_1,t_2)\big|_{t_1=t_2}$, который определяет закон изменения текущей частоты дискретизации сигнала ЛДС.

Возможны следующие способы скачкообразного изменения амплитуды в границах динамического диапазона ССВ:

– от 0 до произвольного значения (переходный режим 1-го вида);

– от произвольного значения до 0 (переходный режим 2-го вида);

– от произвольного значения до противоположного по знаку аналогичного значения (инверсия знака) (переходный режим 3-го вида).

Теоретические модели дисперсии первой производной асимптотически нестационарных сигналов во всех представленных переходных режимах рассмотрены в [1].

Для экспериментальной проверки теоретической модели разработана программа имитационного моделирования на языке Delphi. Исходными данными являются: вид и параметры ССВ и ЛДС; вид переходного режима; длина интервала времени; число реализаций. Экспериментальные значения дисперсии 1-й производной реакции ЛДС вычисляется путем усреднения по ансамблю реализаций. После завершения моделирования на экране отображается график экспериментальных значений дисперсии первой производной с наложенным на нее в едином масштабе графиком теоретических значений дисперсии первой производной, вычисленных по расчетным формулам. Полученные графики могут быть сохранены в графическом формате bmp.

Вывод:

1. Результаты моделирования подтверждают правильность расчетных формул дисперсии первой производной асимптотически нестационарных сигналов типа переходный режим.

Список литературы

1. Мадыев А.П., Ширапов Д.Ш. Определение дисперсии первой производной асимптотически нестационарных сигналов типа переходный режим и анализ ее общих свойств // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. ИрГУПС. — 2008. — №1 — С. 106-109.

К ВОПРОСУ О МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ЛИНЕЙНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Свирский М.С., Свирская Л.М.

ГОУ ВПО Челябинский государственный педагогический университет
Челябинск, Россия svirskayalm@mail.ru

Как известно, основным волновым уравнением нерелятивистской квантовой механики является уравнение Шредингера, которое в одномерном случае имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi\ . \tag{1}$$

В случае ЛГО с потенциальной энергией

$$U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{2}$$

решение уравнения (1) приводит к правилу квантования энергии стационарных состояний

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\ , \tag{3}$$

где n=0,1,2,3,...

Согласно (3) при n=0 в основном состоянии ЛГО имеется отличная от нуля конечная энергия

$$E_0=\frac{\hbar\omega}{2}\,. \tag{4}$$

Известно также, что результат (4) согласуется с соотношением неопределённостей Гейзенберга (см., напр., [1, с. 96; 2, с. 111]). В этом можно убедиться следующим образом. Согласно (1) и (2) в основном состоянии ЛГО с волновой функцией Ψ_0 и энергией E_0 выполняется уравнение

$$\frac{1}{2m}P_x^2\psi_0+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_0=E_0\psi_0\,. \tag{5}$$

Решением этого уравнения является

$$\psi_0=A\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right), \tag{6}$$

где A — постоянный нормирующий коэффициент. В состоянии (6)

$$\bar{x}=0,\quad \left\langle x^2\right\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\,, \tag{7}$$

$$\bar{P}_x=0,\quad \left\langle P_x^2\right\rangle=\frac{m\hbar\omega}{2}\,. \tag{8}$$

Согласно (7) и (8) выполняется соотношение неопределённостей

$$\left\langle(\Delta x)^2\right\rangle\left\langle(\Delta P_x)^2\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\,. \tag{9}$$

При этом согласно (5)

$$\frac{\left\langle P_x^2\right\rangle}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\left\langle x^2\right\rangle=E_0\,. \tag{10}$$

С учётом (7) и (8) из (10) следует

$$E_0=\frac{\hbar\omega}{4}+\frac{\hbar\omega}{4}=\frac{\hbar\omega}{2}\,, \tag{11}$$

что совпадает с (4). Из изложенного видно, что непосредственным следствием равенств (7) и (8) является только соотношение неопределённостей (9). Что касается результата (11), то он получен путём применения равенств (7) и (8) к конкретному уравнению Шрёдингера (1). Поэтому не исключено, что применение (7) и (8) к другому волновому уравнению, отличному от (1), при том же соотношении (9) приведёт к другому результату для минимальной энергии ЛГО, отличному от (4).

Необходимо отметить, что уравнение Шрёдингера не имеет строгого вывода. «Оно не выводится, но устанавливается, и правильность его подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов» [3, с. 490]. Однако не всегда уравнение Шрёдингера согласуется с опытными данными. В частности, при учёте энергии нулевых колебаний спектральная плотность равновесного излучения определяется выражением

$$\rho_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}+\frac{4\pi h\nu^3}{c^3}\,, \tag{12}$$

отличающимся от формулы Планка вторым слагаемым. При этом полная плотность энергии равновесного излучения в основном состоянии

$$\rho_0=\int_0^\infty\rho_\nu\big|_{T=0}\,d\nu=\int_0^\infty\frac{4\pi h\nu^3}{c^3}d\nu=\infty\ , \tag{13}$$