чимыми с точки зрения принятия решений на планирование лётной подготовки, в значительной степени зависит от иерархического уровня принимаемых решений. Так для решений, принимаемых на уровне командира авиационной части, должны использоваться обобщённые показатели, характеризующие управляемые объекты (подразделения ИАС и АТО) в целом, не опускаясь до отдельных технических экипажей или отдельных летательных аппаратов (ЛА).

Разработана модель ИАО и АТО полётов в авиационной части, базирующаяся на типовых моделях теории массового обслуживания. Получено аналитическое выражение, устанавливающее функциональную зависимость вероятности гарантированного ИАО и АТО запланированного для авиационной части объёма налёта от исправности парка средств наземного обеспечения (СНО) полётов и количества самолётов, выделяемых на одну лётную смену. Данная модель может использоваться как модель ограничений системы ИАО и АТО полётов при постановке и решении экстремальных задач по планированию лётной подготовки.

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ШАРА В ЖИДКОСТИ

Снопов А.И.

Южный Федеральный университет, Россия

В курсах лекций по гидродинамике, читаемых в вузах, исследование движения шара в идеальной несжимаемой жидкости представлено лишь для частных случаев, когда отсутствует силовое поле, а центр масс шара совпадает с его геометрическим центром [1, 2, 3]. В книге [4] рассмотрен случай только вертикального движения в жидкости свободного тяжелого шара. Ниже излагается обобщение этого решения на случай произвольных начальных условий динамической задачи о движении в безграничной идеальной жидкости (при $\vec{v}_\infty = 0$) шара радиуса a, центр тяжести которого совпадает с его центром.

Принимается, что поле скоростей в жидкости безвихревое ($\vec{v} = \nabla\phi$), а потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа Δφ=0 (Δ — оператор Лапласа). Положение центра шара A в некоторой неподвижной системе координат в любой момент времени t определяется радиусом-вектором $\vec{r}_A(t)$ а его скорость — вектором $\vec{u} = \dot{\vec{r}}_A(t)$. В начальный момент времени t=0 принимается

$$\vec{r}_A(0) = \vec{r}_{A0}\,,\ \dot{\vec{r}}_A(0) = \vec{u}_{A0} \qquad (1)$$

где векторы $\vec{r}_{A0}$ и $\vec{u}_{A0}$ считаются заданными.

Так как принимается, что жидкость идеальная, то вращение шара в ней, если оно имеет место, никак не влияет на ее движение и поэтому на поверхности шара S достаточно выполнять условия непроницания

$$\vec{v}\cdot\vec{n}\,|_S = \vec{u}\cdot\vec{n}\,|_S\,, \text{ где } \vec{u} = \dot{\vec{r}}_A(t)\,. \qquad (2)$$

Для точки жидкости, положение которой определено радиусом-вектором $\vec{r}$, принимаем $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_A$, $R = |\vec{r} - \vec{r}_A|$. В соответствии с работой [5] потенциал поля скоростей φ и поле скоростей, порожденные в жидкости движущимся шаром, определяются по формулам

$$\phi = -\frac{\vec{M}\cdot\vec{R}^0}{4\pi R^2}\,,\ \vec{v} = -\frac{\vec{M}}{4\pi R^3} + \frac{3\vec{M}\cdot\vec{R}^0}{4\pi R^3}\vec{R}^0 \qquad (3)$$

где $\vec{M} = 2\pi a^3\vec{u}$.

В рассматриваемом случае систему жидкость-шар можно рассматривать как систему с тремя степенями свободы, которым ставятся в соответствие координаты центра шара. Определим функцию Лагранжа этой системы L = T — V, где V — ее потенциальная энергии, а T — кинетическая энергия. Переменная часть потенциальной энергии системы равна

$$V = V_S + V_F \qquad (4)$$

где $V_S = -m\vec{g}\cdot\vec{r}_A$ — потенциальная энергия шара, а $V_F = -(-\frac{4}{3}\pi a^3\rho\vec{g}\cdot\vec{r}_A)$ — жидкости.

Кинетическая энергия системы вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m\vec{u}_A^{\,2} + \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho\vec{v}^2 d\tau \qquad (5)$$

Учитываем, что

$$\vec{v} = \nabla\phi\,,\ \vec{v}^2 = \nabla\phi\cdot\nabla\phi = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi) - \phi\nabla^2\phi\,.$$

Так как течение жидкости принято потенциальным, то ∇2φ = Δφ = 0. Поэтому имеет место равенство $\vec{v}^2 = \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)$ и интеграл в выражении (5) принимает вид

$$\iiint_\tau \rho\vec{v}^2 d\tau = \rho\iiint_\tau \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)d\tau$$

Последний интеграл с помощью формулы Остроградского-Гаусса преобразуется в поверхностный ($\vec{n}$ — внешняя по отношению к жидкости нормаль к поверхности *S*)

$$\iiint_\tau \nabla\cdot(\phi\nabla\phi)d\tau = \iint_S \phi\nabla\phi\cdot\vec{n}dS =$$

$$= \iint_S \phi\vec{v}\cdot\vec{n}dS = -\iint_S \phi\vec{v}\cdot\vec{R}^0 dS$$

При этом выражение (5) для кинетической энергии системы записывается так

$$T = \frac{1}{2} m \vec{u}_A^{\,2} - \frac{1}{2} \rho \iint_S \phi \vec{v} \cdot \vec{R}^0 dS$$

В соответствии с формулами (3) на поверхности шара S имеем

$$\phi = -\frac{1}{2} a \vec{u} \cdot \vec{R}^0 , \quad \vec{v} = -\frac{\vec{u}}{2} + \frac{3\vec{u} \cdot \vec{R}^0}{2} \vec{R}^0$$

При этом справедливы равенства

$$\iint_S \phi \vec{v} \cdot \vec{R}^0 dS = -\iint_S \frac{1}{2} a \vec{u} \cdot \vec{R}^0 \left(-\frac{\vec{u}}{2} + \frac{3^3 \vec{u} \cdot \vec{R}^0}{2} \vec{R}^0\right) \cdot \vec{R}^0 dS = -\frac{1}{2} a \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{R}^0)^2 dS = -\frac{1}{2} a \iint_S u^2 \cos^2\theta dS$$

Для вычисления последнего интеграла учитываем, что dS = 2πa2sin θdθ. Следовательно

$$\iint_S u^2 \cos^2\theta dS = 2\pi a^2 u^2 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^2 u^2$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{3} \rho \pi a^3\right) \dot{\vec{r}}_A^{\,2} \qquad (6)$$

Если принять в декартовых координатах $\vec{r}_A = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$, то функция Лагранжа рассматриваемой системы может быть вычислена по формуле

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2}{3} \rho \pi a^3\right)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \left(m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho\right)(g_1 q_1 + g_2 q_2 + g_3 q_3) \qquad (7)$$

Так как

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \left(m + \frac{2}{3} \rho \pi a^3\right) \dot{q}_k$, $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \left(m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho\right) g_k$, k=1, 2, 3,

то уравнения Лагранжа второго рода ($\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$) принимают вид

$$\left(m + \frac{2}{3} \rho \pi a^3\right) \ddot{q}_k - \left(m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho\right) g_k = 0 \quad \text{k=1, 2, 3} \qquad (8)$$

из которых следует векторное уравнение

$$\left(m + \frac{2}{3} \rho \pi a^3\right) \ddot{\vec{r}}_A - \left(m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho\right) \vec{g} = 0 ,$$

решение которого, удовлетворяющее условиям (1), определяет траекторию центра шара

$$\vec{r}_A = \frac{m - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho}{2\left(m + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho\right)} \vec{g} t^2 + \vec{u}_{A0} t + \vec{r}_{A0} \qquad (9)$$

Как следует из последней формулы, центр шара в общем случае движется по параболе, лежащей в плоскости, построенной на векторах $\vec{g}$ и $\vec{u}_{A0}$, если их начала совместить с начальным положением центра шара, Эта плоскость расположена вертикально, так как содержит в себе вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$.

При $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ шар движется прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{u}_{A0}$.

При $m < \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ шар ускоренно всплывает, а при $m > \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$ шар ускоренно тонет.

При движении шар испытывает динамическое сопротивление

$$\vec{F}_{сопр} == -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho \left(1 - \frac{4\rho\pi a^3}{3m}\right) \vec{g} \,/\, \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\rho\pi a^3}{m}\right) \qquad (10)$$

величину которого можно определить на основе теоремы о количестве движения из уравнения

$$m \ddot{\vec{r}}_A = m \vec{g} - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \vec{g} + \vec{F}_{сопр}$$

Существенно, что это сопротивление направлено не против скорости, а против ускорения земного тяготения, когда шар тонет, и одинаково направлено с ним, когда шар всплывает.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1973. 817 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.Я., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М., 1963. Т. 1, 586 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л., Издательство ЛГУ, 1978, 286 с.
4. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dinamics. Cambridge University. 2000. 631 pp.
5. Снопов А.И. Потенциалы скоростей, порождаемые круглыми цилиндром и шаром в потоке жидкости// Современные наукоемкие технологии, ,№ 7, 2010, С. 321-324.