Физико-математические науки

УДК 532.39

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

Миронова С.М.
Мордовский государственный педагогический институт,
Саранск, Россия

Рассматривается распространение волн на поверхности жидкого диэлектрика с постоянной диэлектрической проницаемостью, находящегося на слое диэлектрической пористой среды, насыщенной жидкостью. Система координат выбрана так, что ось z направлена вертикально вверх, против вектора $\overline{g}$ ускорения свободного падения; $z=-h_1$ – твердая поверхность, ограничивающая снизу пористый слой ($-h_1 \le z \le 0$); $z=0$ – поверхность раздела пористого слоя и свободной жидкости, $z=h_2$ – невозмущенная свободная поверхность слоя жидкости, занимающей область $0 \le z \le h_2$. Над поверхностью жидкости находится среда пренебрежимо малой плотности (атмосфера). Номерами 1, 2, 3 обозначаются величины, относящиеся к пористой среде, свободной жидкости и атмосфере соответственно. Приложенное однородное электрическое поле имеет произвольное направление. В результате распространения волн поле перестает быть однородным: появляется возмущение электрического поля. Предполагается, что в диэлектрике отсутствуют свободные электрические заряды.

Система уравнений движения жидкости в областях 1 и 2, а также для электрического поля в областях 1, 2, 3 имеет вид [1, 2, 3]:

$$1)\ \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho\overline{g} - \frac{\eta}{K}\overline{u}_1,\quad 2)\ div\overline{u}_1 = 0,$$

$$3)\ \rho\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \rho\overline{g},\quad 4)\ div\overline{u}_2 = 0; \tag{1}$$

$$5)\ rot\overline{E}_i = 0,\ div\varepsilon_i\overline{E}_i = 0\ (i=1,\ 2.\ 3).$$

Здесь ρ – плотность жидкости, Γ – пористость, $\overline{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации, $\overline{u}_2$ – скорость свободной жидкости; p_1, p_2 – давление, η – вязкость, K – коэффициент проницаемости, $\overline{E}_i$ – напряженность электрического поля; ε_i – диэлектрические проницаемости, предполагаемые постоянными.

Система граничных условий на поверхностях раздела [1, 2, 3]:

$$1)\ u_{1z} = 0\ (z=-h_1),\quad 2)\ \overline{E}_{3w} = 0\ (z=-h_1),\quad 3)\ u_{1z} = u_{2z}\ (z=0),$$

$$4)\ \overline{E}_{1\tau} = \overline{E}_{2\tau},\ (z=0),\quad 5)\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},\ (z=0),$$

$$6)\ p_1 - \frac{\varepsilon_1}{4\pi}E_{1n}^2 + \frac{1}{8\pi}\varepsilon_1\overline{E}_1^2 = p_2 - \frac{\varepsilon_2}{4\pi}E_{2n}^2 + \frac{1}{8\pi}\varepsilon_2\overline{E}_2^2\quad (z=0), \tag{2}$$

$$7)\ u_{2z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\ (z=h_2+\xi),\quad 8)\ \overline{E}_{2\tau} = \overline{E}_{3\tau}\ (z=h_2+\xi),\quad 9)\ \varepsilon_2 E_{1n} = \varepsilon_3 E_{3n}\ (z=h_2+\xi),$$

$$10)\ p_2 - \frac{\varepsilon_2}{4\pi}E_{2n}^2 + \frac{1}{8\pi}\varepsilon_2\overline{E}_2^2 - p_3 + \frac{\varepsilon_3}{4\pi}E_{3n}^2 - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_3\overline{E}_3^2 = -\alpha\Delta_2\xi\quad (z=h_2+\xi),$$

$$11)\ \overline{E}_{3w} = 0\ (z\to\infty).$$

Здесь $\overline{E}_i = \overline{E}_{i0} + \overline{E}_{iw}$, $\overline{E}_{i0}$ – невозмущенное поле, $\overline{E}_{iw}$ – возмущение поля; $z = h_2 + \xi(x,y,t)$ – свободная возмущенная поверхность жидкости; $E_{in} = \overline{E}_i \cdot n$, $\overline{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, направленный из области 2 в 3; индекс τ означает касательную к поверхности составляющую вектора; α – коэффициент поверхностного натяжения; $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $p_3 = p_{атм} = const$.

Из уравнений (1) следует: $\overline{E}_i = -\nabla\psi_i = -\nabla\psi_{i0} - \nabla\psi_{iw}$, $\overline{u}_2 = \nabla\varphi$. Записывая давление в виде $p_i = p_{i0} + p_{iw}$ ($i = 1,2$), и учитывая, что в линейном приближении $\overline{n} = -\frac{\partial\xi}{\partial x}\overline{e}_1 - \frac{\partial\xi}{\partial y}\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, где $\overline{e}_i$ – единичные базисные векторы. Перепишем граничные условия (2) в виде:

1) $u_{1z} = 0\,(z = -h_1)$, 2) $\psi_{1w} = 0\,(z = -h_1)$, 3) $u_{1z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ $(z = 0)$,

4) $\psi_{1w} = \psi_{2w}$ $(z = 0)$, 5) $\varepsilon_1 \frac{\partial\psi_{1w}}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z}$ $(z = 0)$,

6) $p_{1w} + \frac{\varepsilon_1}{4\pi}(-\overline{E}_{01}\cdot\nabla\psi_{1w} + 2E_{01z}\frac{\partial\psi_{1w}}{\partial z}) = p_{2w} + \frac{\varepsilon_2}{4\pi}(-\overline{E}_{02}\cdot\nabla\psi_{2w} + 2E_{02z}\frac{\partial\psi_{3w}}{\partial z})$ $(z = 0)$,

7) $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}$ $(z = h_2)$, 8) $E_{02z}\cdot\xi - \psi_{2w} = E_{03w}\cdot\xi - \psi_{3w}$ $(z = h_2)$,

9) $\varepsilon_2(\overline{E}_{02}\cdot\nabla_2\xi + \frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z}) = \varepsilon_3(\overline{E}_{03}\cdot\nabla_2\xi + \frac{\partial\psi_{3w}}{\partial z})$ $(z = h_2)$, (3)

10) $p_{2w} + \frac{\varepsilon_1}{4\pi}(-\overline{E}_{01}\cdot\nabla\psi_{2w} + 2E_{02z}\frac{\partial\psi_{2w}}{\partial z}) + \frac{\varepsilon_3}{4\pi}(\overline{E}_{03}\cdot\nabla\psi_{3w} - 2E_{03z}\frac{\partial\psi_{3w}}{\partial z}) = -\alpha\Delta_2\xi$ $(z = h_2)$,

11) $\psi_{3ц} = 0$ $(z \to \infty)$.

Здесь $\nabla_2\xi = \overline{e}_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + \overline{e}_2\frac{\partial\xi}{\partial y}$; $\varphi = \varphi(x,y,z,t)$; $\psi_{iw} = \psi_{iw}(x,y,z,t)$; $P_{3w} = 0$.

Первые четыре уравнения (1) принимают для возмущений вид:

1) $\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial\overline{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_{1w} + \rho\overline{g} - \frac{\eta}{K}\overline{u}_1$, 2) $div\overline{u}_1 = 0$, 3) $\rho\frac{\partial\overline{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \rho\overline{g}$, 4) $div\overline{u}_2 = 0$. (4)

С учетом равенств $\overline{u}_2 = \nabla\varphi$, $\overline{E}_{iw} = -\nabla\psi_{iw}$ система (1) записывается в виде:

1) $\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{1z} = -\frac{\eta}{K}\Delta\overline{u}_{1z}$, 2) $\Delta\varphi = 0$, 3) $\Delta\psi_{iw} = 0$ $(i = 1,2,3)$ (5)

Для исключения давления P_{1w} из уравнения 6) в граничных условиях (3), при помощи уравнения 1) системы (4) запишем:

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial u_{1x}}{\partial t} = -\frac{\partial P_{1w}}{\partial x} - \frac{\eta}{K}u_{1x},\quad \frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial u_{1y}}{\partial t} = -\frac{\partial P_{1w}}{\partial y} - \frac{\eta}{K}u_{1y}, \tag{6}$$

Из уравнения непрерывности $div\overline{u}_1 = 0$ следует

$$\frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1y}}{\partial y}. \tag{7}$$

Продифференцируем первое и второе уравнения (6) по x и y соответственно; сложим полученные равенства и при помощи (7) получим соотношение

$$\Delta_2 P_{1w} = \frac{\partial^2 P_{1w}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_{1w}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t\partial z} + \frac{\eta}{K}\frac{\partial u_{1z}}{\partial z}. \tag{8}$$

Аналогично из уравнений 3) и 4) системы (4) следует:

$$\Delta_2 P_{2w} = \rho\frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t\partial z}. \tag{9}$$

Применяя к обеим частям равенства 6) в системе (3) оператор $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ и, используя затем равенства (8) и (9), вместо равенства 6), получим другое равенство 6’), в котором отсутствуют P_{1w} и P_{2w}.

Для исключения P_{2w} и ξ из равенства 10) системы (3) выражение

$$P_{2w} = -\rho g\xi - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

а затем продифференцируем равенство 10) по t с учетом $u_{2z} = \partial\xi/\partial t$ и $u_{2z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. В результате вместо 10) получим равенство $10'$), в котором отсутствует P_{2w} и ξ.

Для исключения ξ из равенства 8) в системе (3) следует продифференцировать по t обе части этого равенства и использовать соотношение $u_{2z} = \partial\xi/\partial t$. В результате получим равенство $8'$).

Чтобы исключить ξ из равенства 9) системы (3), это равенство дифференцируем по t и используем затем $u_{2z} = \partial\xi/\partial t$. В результате получим равенство $9'$).

Решение системы уравнений (5) ищем в виде бегущих затухающих волн

$$\begin{aligned}
&u_{1z}(x,y,z,t) = U(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)],\\
&\varphi(x,y,z,t) = \Phi(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)],\\
&\psi_{iw}(x,y,z,t) = \Psi_i(z)\exp[-\gamma t + i(k_1x + k_2y)].
\end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь U, Φ, Ψ_i – амплитуды; k_1, k_2 – компоненты волнового вектора $\bar{k} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$; $i = 1,2,3$; $\gamma = \mathrm{Re}(\gamma) + i\,\mathrm{Im}(\gamma)$; $\beta = \mathrm{Re}(\gamma)$ – декремент затухания колебаний волны ($\beta \ge 0$), $\omega = |\mathrm{Im}(\gamma)|$ – частота колебаний волны.

Поставляя выражения (10) в уравнения (5), получим систему пяти линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка нахождения для нахождения пяти амплитуд U, Φ, Ψ_i. Решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{aligned}
&U(z) = C_1\exp(-kz) + C_2\exp(kz),\\
&\Phi(z) = C_3\exp(-kz) + C_4\exp(kz),\\
&\Psi_i(z) = C_{i+j}\exp(-kz) + C_{i+j+1}\exp(kz).
\end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ – волновое число, $i = 1,2,3$; $j = 4,5,6$; $C_n(n = 1,2,...,10)$ – произвольные постоянные, для нахождения которых подставляем выражения (11) в десять граничных условий: 1), 2), 3). 4), 5), $6'$), $8'$), $9'$), $10'$), 11). В результате будем иметь однородную систему десяти линейных относительно C_n алгебраических уравнений, которая имеет ненулевые решения только при равенстве нулю определителя системы, составленного из коэффициентов при C_n.

В связи с громоздкостью вычислений, ограничимся далее случаем чисто поперечного приложенного электрического поля, т. е. $E_{i0z} \ne 0$, $E_{0ix} = E_{0iy} = 0$ ($i = 1,2,3$), а также будем предполагать, что слой пористой среды имеет бесконечную толщину ($h_1 \to +\infty$).

Седьмое граничное условие (3) используется для нахождения профиля волны:

$$\xi(x,y,t) = \int\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t}\Big|_{z=h_2}dt.$$

Приравнивая к нулю определитель вышеназванной системы, получим дисперсионное уравнение для поверхностных волн, связывающее между собой величины γ и k:

$$\frac{\rho^2L}{g}(a_1 - \frac{a_2}{\Gamma})\gamma^3 + \frac{\rho\eta L}{dK}a_2\gamma^2 + \rho\gamma k[(\frac{a_1}{\Gamma} - a_2)N + Q] - \frac{\eta k}{K}Na_1 = 0; \qquad (12)$$

$$L = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\exp(2kh_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3),\ M = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[\exp(2kh_2) + 1],$$

$$N = (\rho + \frac{\alpha k^2}{g})L - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{4\pi g}(E_{02z} - E_{03z})^2M,\ Q = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{2\pi g}(E_{01z} - E_{02z})(E_{02z} - E_{03z})(a_2 - a_1),$$

$$a_1 = 1 - \exp(2kh_2),\quad a_2 = 1 + \exp(2kh_2).$$

Зависимость величин β и ω от волнового числа k и от других параметров рассматривается на примере жидкого диэлектрика бензола, для которого при температуре $20^{\circ}C$: $\rho = 0{,}879 г/см^3$; $\alpha = 29{,}0 дин/см$; $\varepsilon_2 = 2{,}29$; $\eta = 0{,}00648 г/см \cdot с$. Пористая среда моделируется совокупностью стеклянных шариков с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_4 = 5$. Величина ε_1 находится по формуле $\varepsilon_1 = \Gamma \cdot \varepsilon_2 + (1-\Gamma)\varepsilon_4$; для воздуха принимаем $\varepsilon_3 = 1$. Коэффициент проницаемости K пористой среды в формуле (2) находится по формуле Козени [4]:

$$K = \frac{\Gamma^3}{150(1-\Gamma)^2} d^2,$$

где *d(см)* – диаметр шариков.

Напряженность электрического поля измеряется в единицах СГС (1 ед. СГС=300 В/см). Значения *E* выбирались такими, чтобы они не превышали напряженность пробоя в воздухе при $20^{\circ}C$ (это около 80 ед. СГС = 24000 В/см).

Расчеты показывают, что при каждом фиксированном значении волнового числа k и значения E_3, величина β возрастает с ростом пористости Γ; с ростом k крутизна графика этой зависимости уменьшается.

При каждой фиксированной толщине слоя h_2 и значении E_3, при увеличении k значения β вначале возрастают, а затем, по достижении максимума, убывают. Чем меньше h_2, тем круче график зависимости $\beta(k)$ на участке роста. При увеличении температуры от $10^{\circ}C$ до $50^{\circ}C$, точка максимума графика $\beta(k)$ поднимается.

При увеличении E_3 частота ω убывает при фиксированных h_2 и k.

С ростом Γ частота ω возрастает при фиксированных h_2, k и E_3.

Функция $\beta(\sigma)$, где $\sigma = h_2/\lambda$ ($\lambda = 2\pi/k$ – длина волны), при увеличении σ вначале возрастает, а по достижении максимума, убывает. При увеличении h_2 точка максимума опускается.

В заключение автор благодарит профессора Н.Г. Тактарова за руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Столяров И.В., Тактаров Н.Г. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1987. №5. С. 183 – 186.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

Технические науки

ЦЕМЕНТОБЕТОН С ДИСПЕРСНЫМ БИТУМОМ

Горнаев Н.А., Пыжов А.С., Андронов С.Ю.
Саратовский государственный технический университет, Саратов, Россия

Одним из признанных методов повышения дорожно-технических свойств цементобетона является введение добавок органического вяжущего – нефтяного битума. При этом в нём помимо кристаллизационных связей формируются и гидрофобные коагуляционные связи. Благодаря этому цементобетон приобретает повышенную водостойкость, морозостойкость, трещиностойкость, деформативность и стойкостью к агрессивным средам [1]. Изменение относительного содержания и свойств цемента и битума позволяет получать бетоны с большим диапазоном технических свойств, с учётом специфических условий их применения. При повышенном содержании битума получаются цементоасфальты, со свойствами асфальтобетона более высокого качества [2].

В настоящее время наиболее научно обоснованным и применяемым является введение в бетонную смесь битума в виде битумной эмульсии [1, 2]. Это требует заблаговременного производства эмульсий с использованием специального оборудования и эмульгаторов, нередко зарубежного производства, дополнительных затрат на их хранение, транспортирование, подачу к смесителю и дозирование. Водные растворы поверхностно-активных эмульгаторов оказывают негативное влияние на процессы гидратации цемента.

В Саратовском государственном техническом университете (СГТУ) предложена и разрабатыва-