Боссю представил исследование в форме последовательно изложенных аксиоматических положений, в большинстве случаев установленных путем наблюдений. Каждое положение было реализовано в форме общего решения задачи. Ученый рассматривал все задачи применительно к двум типам сводов: цилиндрическим и сферическим.

Важной составляющей работы Боссю стал расчет толщины опор арок для обоих типов сводов. В основу расчета было положено условие равенства моментов внешних сил, воздействующих на опору. При этом ученый последовательно исходил из двух гипотез разрушения: горизонтального смещения основы арки и разрушения верхней части свода в области пазуха.

В работах по исследованию равновесия сводов Боссю придерживался геометрической манеры изложения и доказательств выдвигаемых положений и решения задач, последовательность и способ изложения теории в работах ученого оказались во многом сходными с современным изложением учебных пособий.

Методика расчета толщины опоры арки, которую разработал Боссю на основе выведенной теории, и особенно последующий анализ полученного решения позволили отнести исследовательские работы ученого к практическим руководствам по строительству одного из важных элементов архитектуры того времени – свода.

Таким образом, прикладные работы Шарля Боссю по строительству гидросооружений и расчету равновесия сводов имели огромное научное значение. Сложно переоценить их влияние не только на становление многих практических инженеров и строителей той эпохи, для которых она оказалась просто незаменимой, но и на становление творческой мысли будущих ученых.

Главная заслуга Шарля Боссю заключается в том, что он внес ясность и математическую строгость в такую сугубо практическую сферу, как строительство. Ранее знания в этой области накапливались на протяжении веков и уточнялись опытным путем, цена ошибок была велика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Левковский П. Е. Задачи конструирования оптимальных гидросооружений в творчестве Шарля Боссю. Электронный журнал "Исследовано в России", 58, 653–661, 2008. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2008/058.pdf

2. Левковский П. Е. Задачи расчета устойчивости сводов в трудах механиков XVIII века на примере работ Шарля Боссю. // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2009 – вып. 3(29). С. 183-191.

3. Яковлев В. И. Начала механики. – М. – Ижевск: РХД, 2005. – 352 с.

4. L’abbe Bossut, Guillaume Viallet. Recherches sur la construction la plus avantageuse des digues ouvrage qui a remporté le prix quadruple proposé par l'Académie royale des sciences, inscriptions & belles-lettres de Toulouse pour l'année 1762. Paris: C.-A. Jombert, 1764.

5. L’abbe Bossut. Recherches sur l’équillibre des voûtes. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1774 (1778), p. 534–566.

6. L’abbe Bossut. Nouvelles recherches sur l’équillibre des voûtes en dôme. // Mém. Acad. roy. sci. Paris, 1776 (1779), p. 587–596.

Математическое моделирование социально-экономических процессов

О ПРИМЕНЕНИИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Глушков И.Н.
ГУ-ВШЭ,
Москва, Россия

В настоящей работе рассматриваются методы определения дисконтной функции, ставки спот и мгновенной форвардной ставки по ценам купонных облигаций, основанные на использовании сплайн-функций. Использовать сплайны для моделирования процентных ставок было предложено в работе [4] и затем этот подход применялся во многих работах. Здесь обсуждаются различные методы определения структуры процентных ставок по ценам купонных облигаций с помощью сплайн-функций.

Структура процентных ставок обычно представляется тремя кривыми: дисконтной функцией, ставкой спот (кривой доходности) и мгновенной форвардной ставкой [1].

Дисконтная функция $\delta:[0,+\infty)\to(0,1],\delta(0)=1$ описывает текущую стоимость одного рубля, выплаченного через t лет. Для облигации с погашением в момент времени t ее текущая стоимость, характеризуемая текущей ценой облигации $B(t)$, выражается через дисконтную функция $\delta(t)$ при помощи формулы

$$B(t)=F\delta(\overline{t}-t)+c\int_{0}^{\overline{t}-t}\delta(s)\mathrm{d}s$$

где c – купонная ставка и F– номинал облигации.

Ставка спот (кривая доходности) $\eta:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ получается из дисконтной функции следующим образом

$$\eta(t)=-\frac{1}{t}\ln\delta(t).$$

Мгновенная форвардная ставка $\rho:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ представляет ставку доходности на инвестиции, сделанные в бесконечно малый промежуток времени $[t,t+\Delta t]$. Мгновенная форвардная ставка связана с дисконтной функцией следующим соотношением

$$\rho(t)=-\frac{\delta'(t)}{\delta(t)}.$$

Из этих определений ясно, что если одна из трех функций известна, другие две могут быть найдены. Определение мгновенной форвардной ставки подразумевает также, что дисконтная функция $\delta(t)$ должна быть непрерывно дифференцируема, т.е. должна быть функцией класса C^1.

Наиболее распространенным вариантом определения структуры процентных ставок с помощью сплайнов является построение с их помощью дисконтной функции.

Дисконтную функцию представляют как линейную комбинацию n непрерывно дифференцируемых функций $\{f_j(x)\}_{j=1}^{n}$ (например, B-сплайнов, экспоненциальных сплайнов): $\delta(t)=a_0+\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)$.

Поскольку стоимость 1 рубля в настоящий момент равна 1, необходимо, чтобы $\delta(0)=1$. Поэтому $a_0=1$ и $f_j(0)=0$. Таким образом, дисконтная функция приобретает вид $\delta(t)=1+\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)$.

Предположим, что модель для цены каждой облигации (плюс некоторый начисленный процент α) имеет вид

$$B+\alpha=c\sum_{k=1}^{\bar{t}}\delta(t_k)+F\delta(t_x)+\varepsilon,$$

где ε – нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2. В случае, если сплайны применяются к дисконтной функции,

$$\delta(t)=1+\sum_{j=1}^{n}a_j f_j(t)=1+\mathbf{a}'\mathbf{f}(t),$$

где $\mathbf{f}(t)=(f_1(t),\ldots,f_n(t))'$ – n-мерный вектор, составленный из набора базисных функций $\{f_j(t): j=1,\ldots,n\}$, и $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)'$ – это неизвестный вектор параметров, который необходимо оценить. Тогда функция плотности распределения цены облигации может быть выражена следующим образом:

$$f(y\,|\,\mathbf{t};\mathbf{a},\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(B-\mathbf{c}'\Phi\mathbf{a})^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)'$ – вектор моментов времени, в которые производятся выплаты, $y=B+\alpha$, $\Phi=(\mathbf{f}(t_1),\ldots,\mathbf{f}(t_n))'$ и $\mathrm{c}=(c,\ldots,c,c+R)'$. Эта спецификация удобна для оценивания параметров, поскольку дисконтная функция линейна по отношению к неизвестным параметрам.

Однако сплайны можно применять не только напрямую к дисконтной функции, но и к доходности бескупонной облигации или к мгновенной форвардной ставке.

Предполагая, что сплайны применяются к доходности бескупонной облигации $\eta(t)$, она выражается как $\eta(t)=\sum a_j f_j(t)$. Тогда дисконтная функция выражается по формуле $\delta(t)=\exp\left(-t\sum a_j f_j(t)\right)$.

Видно, что $\delta(t)$ нелинейно выражается через $\{a_j\}$. Следовательно, применение сплайнов к доходности бескупонной облигации приводит к следующей экспоненциальной форме:

$$\delta(t, \mathbf{a}) = \exp\left(-t\sum_{j=1}^{n} a_j f_j(t)\right).$$

В случае применения сплайнов для построения мгновенной форвардной ставки имеем $f(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(t)$. Тогда дисконтную функцию можно выразить через форвардную ставку следующим образом:

$$\delta(t, \mathbf{a}) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j(t)\right),$$

где $\psi_j(t) = \int_0^t f_j(s)ds$. Эта функциональная форма напоминает случай, когда при помощи сплайнов строится кривая доходности бескупонной облигации, однако выбор базисных функций отличается. Интегральная форма ведет к тому, что базисные функции в модели являются монотонными, что предпочтительно при аппроксимации функции $\delta(t)$, которая должна монотонно убывать с ростом t.

Для обоих этих случаев (применение сплайнов к доходности бескупонной облигации либо к мгновенной форвардной ставке) функция плотности распределения цены облигации принимает форму:

$$f\left(y \mid \mathbf{t}; \mathbf{a}, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\left(B - \mathbf{c}'\delta(\mathbf{t}, \mathbf{a})\right)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $y = B + \alpha$, $\delta(\mathbf{t}, \mathbf{a}) = \left(\delta(t_1, \mathbf{a}), \ldots, \delta(t_n, \mathbf{a})\right)'$ – дисконтный вектор и $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ – вектор неизвестных параметров для оценивания на основе исходных данных.

Для определения вектора неизвестных параметров $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)'$ и параметра σ^2 максимизируют логарифмическую функцию правдоподобия

$$l_\lambda\left(\mathbf{a}, \sigma^2\right) = \sum_{i=1}^{M} \log f\left(y_i \mid \mathbf{t}_i; \mathbf{a}, \sigma^2\right).$$

Однако, в ряде случаев оцененная структура процентных ставок, полученная с использованием традиционных методов сплайн-регрессии, может выглядеть нереалистичной с финансовой точки зрения, когда построенные дисконтные функции имеют сильные колебания и не сохраняют монотонность [5].

Поэтому важным вопросом при использовании сплайнов является выбор количества базисных функций. Если количество базисных функций n слишком мало, тогда не удастся хорошо передать дисконтную функцию, когда она имеет сложную форму. Если же n слишком велико, дисконтная функция может чутко реагировать на «посторонние» колебания или выбросы в ущерб гладкости. В работе [4] предлагается использовать в качестве n ближайшее целое к квадратному корню из числа наблюдений.

Другой подход к решению этой проблемы – использование информационных критериев и введение штрафных членов в функцию правдоподобия [2].

Нестабильность оцененных кривых доходности всегда порождается плохой природой регрессионных сплайнов в большей степени, чем неверным выбором базисных функций [2]. Для того, чтобы избежать переопределения, в логарифмическую функцию правдоподобия вводится штрафное слагаемое. Функция правдоподобия со штрафом выглядит следующим образом:

$$l_\lambda\left(\mathbf{a}, \sigma^2\right) = \sum_{i=1}^{M} \log f\left(y_i \mid \mathbf{t}_i; \mathbf{a}, \sigma^2\right) - \frac{M\lambda}{2}\sum_{j=2}^{n}\left(\Delta^2 a_j\right)^2,$$

где λ – параметр гладкости, контролирующий гладкость дисконтной функции, $\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$ – оператор разности.

Задавая λ и n, неизвестные параметры a и σ^2 могут быть получены путем максимизации функции правдоподобия $l_\lambda(a,\sigma^2)$.

Однако остается проблема – критерий, на основании которого необходимо выбирать сглаживающий параметр λ и число базисных функций n. Поскольку в функцию правдоподобия добавлено штрафное слагаемое, применение информационного критерия Акаике (Akaike Information Criteria – AIC) является теоретически необоснованным [2]. Вместо него применяется обобщенный информационный критерий (Generalized Information Criteria – GIC) [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Chiu N.-C., Fang S.-C., Lavery J.E., Lin J.-Y., Wang Y. Approximating Term Structure of Interest Rates Using Cubic L_1 Splines // European Journal of Operational Research. 2008. Vol. 184. P. 990-1004.

2. Kawasaki Y., Ando T. Estimating Term Structure Using Nonlinear Splines: a Penalized Likelihood Approach // International Congress on Modeling and Simulation, section: Econometric modelling and financial econometrics. December 2005. Melbourne University, Vic P. 864-870.

3. Konishi S., Kitagawa G. Information Criteria and Statistical Modeling. Springer, 2008.

4. McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates // The Journal of Business. 1971. Vol. 44. No. 1. P. 19-31.

5. Ramponi A. Adaptive and Monotone Spline Estimation of Cross-Sectional Term Structure // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2003. Vol. 6. No 2. P.195-212.

Новые информационные технологии и системы

ОБ ОДНОЙ ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЧИН ЭФФЕКТА ГРАНИ ПРИ НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ РАСПЛАВОВ В КОСМОСЕ

Бабичева Д.С., Арестова М.А., Казарина М.И., Серпухова А.А., Кожевникова Е.В.

Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королёва, Самара, Россия

Введение. В работе рассматривается выявленный авторами работы [1] эффект грани в экспериментах с направленной кристаллизацией. Процесс кристаллизации является длительным и по захвату примеси в различных сечениях образовавшегося кристалла можно судить об уровне микроускорений, используя приближённые методики оценки, например [2-5]. Считается, что чем выше уровень микроускорений, тем интенсивнее должны быть движения конвективного типа в расплаве, а, следовательно, и захват примеси при кристаллизации [6-8]. Однако в ряде случаев было выявлено отклонение от этой логики [1]. Этот феномен и был назван эффектом грани.

Постановка задачи. Требуется найти возможное объяснение поведения примесного канала при направленной кристаллизации в рамках физической модели микроускорений [9-12].

Основные результаты работы. На основе проведенного анализа, учитывая, что квазистатическая компонента микроускорений соответствует понятию случайной величины [13], можно утверждать, что на захват примеси влиял не только сам модуль микроускорений, но и динамика его изменения во времени. Именно быстрые динамические изменения поля микроускорений во времени в зоне проведения направленной кристаллизации и привели к появлению эффекта грани. Поэтому условия для благоприятного протекания технологических экспериментов не должны сводиться лишь к ограничениям модуля микроускорений. Данная серия экспериментов наглядно демонстрирует всю сложность влияния поля микроускорений на гравитационно-чувствительные технологические процессы.

Работа выполнена силами студенческой творческой лаборатории «Позитрон» при студенческом научном обществе института энергетики и транспорта СГАУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Земсков В.С., Раухман М.Р., Шалимов В.П. Гравитационная чувствительность расплавов при выращивании кристаллов InSb:Te методами Бриджмена и бестигельной зонной плавки в условиях микрогравитации // Космические исследования. – том. 39. - №4. – 2001. – с. 375 – 383.

2. Авраменко А.А., Седельников А.В. Моделирование поля остаточной микрогравитации на борту орбитального КА // Изв. вузов Авиационная техника. – 1996. – № 4. – С. 22-25.

3. Седельников А.В. Фрактальная оценка микроускорений для слабого демпфирования собственных колебаний упругих элементов космического аппарата. I // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2006. – № 3. – С.73-75.

4. Седельников А.В. Фрактальная оценка микроускорений для слабого демпфирования собственных колебаний упругих элементов космического аппарата. II // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2007. – № 3. – С. 62-64.

5. Sedelnikov A.V. Modelling of microaccelerations with using of Weierstass-Mandelbrot function // Actual problems of aviation and aerospace systems. – 2008. - № 1(26). – P. 107-110.