УДК 539.3/.6

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Таршис Ю.Д., Таршис М.Ю.

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия

В статье рассматриваются подходы к решению задач оптимизации двух видов. Первая задача заключается в максимизации надежности конструкции, технического устройства при ограничениях стоимости. Вторая состоит в минимизации затрат при ограничениях на вероятность безотказной работы устройства, элемента конструкции, машины. Задачи сводятся к определению условного экстремума функции случайных величин прочности и нагрузки.

Проектирование различных конструкций требует компромиссного выбора ряда параметров. К их числу относятся параметры надёжности технического устройства, форма и физические особенности его элементов, стоимость изготовления и затраты при эксплуатации. Надежность зависит от соотношения между распределениями случайных величин, которыми являются прочность R и нагрузка S. Параметры этих распределений (математические ожидания m_R и m_S и среднеквадратичные отклонения σ_R и σ_S) зависят от конструктивных параметров, свойств материалов, характера их обработки и, следовательно, от материальных затрат на изготовление и эксплуатацию технического устройства, конструкции. В связи с этим возникает необходимость либо максимизировать надежность при некоторых ограничениях стоимости, либо минимизировать затраты при условии, что будет достигнут требуемый уровень надежности. Таким образом, задача по оптимизации прочностных расчетов сводится к нахождению условного экстремума функции нескольких случайных переменных.

Если прочность и нагрузка являются независимыми случайными величинами, распределенными по нормальному закону, вероятность безотказной работы, характеризующая надежность конструкции, определяется по формуле:

$$P((R-S)>0) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt, \tag{1}$$

где $z=-(m_R-m_S)(\sigma_R^2+\sigma_S^2)^{-1/2}$.

Согласно (1) вероятность безотказной работы зависит от нижнего предела интегрирования и для ее максимизации нужно уменьшать значение этого предела (увеличивать его абсолютное значение).

Стоимость конструкции является функцией параметров распределения прочности и нагрузки и может быть представлена в виде суммы:

$$C=C_1(m_R)+C_2(\sigma_R)+C_3(m_S)+C_4(\sigma_S). \tag{2}$$

Здесь $C_1(m_R)$ обозначает зависимость стоимости от значения средней прочности. Для ее повышения требуется применение более дорогих материалов, высокотехнологических приемов обработки и др., что естественно увеличивает за-

траты. Следовательно, $C_1(m_R)$ является монотонно возрастающей функцией m_R. $C_2(\sigma_R)$ - стоимость изделия, зависящая от среднеквадратичного отклонения R, а $C_3(m_S)$ и $C_4(\sigma_S)$ - функции затрат, связанные с математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением напряжений, соответственно. Как видно из (1) их меньшие значения увеличивают надежность конструкции, однако, для их уменьшения требуются дополнительные расходы, связанные с изменением формы и размеров элементов конструкции, улучшением качества их обработки и контроля нагрузок действующих на них. Поэтому эти функции являются монотонно убывающими.

Рассмотрим две задачи оптимизации. В первой требуется мини-мизировать общие затраты при ограничении заданной надежности:

- минимизировать $C = C_1(m_R) + C_2(\sigma_R) + C_3(m_S) + C_4(\sigma_S)$
- ограничение

$$(m_R - m_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} \geq |z| \tag{3}$$

В этом случае функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L(m_R, \sigma_R, m_S, \sigma_S, \lambda) &= C_1(m_R) + C_2(\sigma_R) + C_3(m_S) + C_4(\sigma_S) \\ &+ \lambda\left[m_R - m_S - |z|(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Вторая задача формулируется следующим образом:

- максимизировать $|z| = (m_R - m_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2}$
- ограничение

$$C_1(m_R) + C_2(\sigma_R) + C_3(m_S) + C_4(\sigma_S) \leq C_0. \tag{5}$$

Для нее функция Лагранжа есть

$$\begin{aligned} L(m_R, \sigma_R, m_S, \sigma_S, \lambda) &= (m_R - m_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} + \\ &+ \lambda\left[C_1(m_R) + C_2(\sigma_R) + C_3(m_S) + C_4(\sigma_S) - C_0\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Для нахождения оптимальных решений необходимо продифференцировать функцию Лагранжа по переменным $m_R, \sigma_R, m_S, \sigma_S$ и λ и приравнять производные нулю. Для (4), например, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m_R} &= \frac{\partial C_1(m_R)}{\partial m_R} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial m_S} &= \frac{\partial C_3(m_S)}{\partial m_S} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_R} &= \frac{\partial C_2(\sigma_R)}{\partial \sigma_R} - \lambda z \sigma_R (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_S} &= \frac{\partial C_4(\sigma_S)}{\partial \sigma_S} - \lambda z \sigma_S (\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_S} &= m_R - m_S - z(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение полученной системы (7) позволит определить все значения указанных переменных, при которых могут достигаться локальные оптимумы.

Чтобы найти глобальный оптимум необходимо исследовать структуру задачи. Например, для (3) с этой целью следует построить матрицу Гесса для функции ограничений, которая имеет вид:

$$g(m_R, \sigma_R, m_S, \sigma_S) = z(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2} - m_S + m_R . \quad (8)$$

Элементами симметричной матрицы Гесса являются вторые производные функции (8) по указанным переменным и она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} z\sigma_S^2(\sigma_R^2+\sigma_S^2)^{-3/2} - z\sigma_S\sigma_R(\sigma_R^2+\sigma_S^2)^{-3/2} 00 \\ -z\sigma_R\sigma_S(\sigma_R^2+\sigma_S^2)^{-3/2} z\sigma_S^2(\sigma_R^2+\sigma_S^2)^{-3/2} 00 \\ 0000 \\ 0000 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Несложно показать, что в этом случае первый определитель подматрицы Гесса будет положительным при $z > 0$, а остальные равны нулю. То есть матрица является, положительной полуопределенной [1]. Следовательно, функция ограничений, является выпуклой. С учетом того, что функции затрат монотонны, вытекает, что любой локальный оптимум задачи является глобальным.

Необходимо отметить, что поставленные задачи могут не иметь оптимумов, когда, например, матрица Гесса оказывается неопределенной. В этом случае необходимо вносить корректировки в задачу оптимизации, изменяя параметры функции ограничений, изменяя надежность конструкции или ее стоимость.

Знание оптимальных значений математических ожиданий и дисперсий для прочности и нагрузки, которые получены из решения задачи (3), позволяют рассчитывать оптимальные параметры нагруженных элементов конструкций [2].

В заключение следует отметить, что метод вероятностного конструирования, связанный с необходимостью использования достаточно сложных уравнений математики, теории вероятности, статистики, тем не менее, является весьма перспективным. Это обусловлено широким внедрением в инженерную практику систем автоматизированного проектирования, в составе которых содержатся стандартные программы решения статистических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. – 454 с.

2. Таршис Ю.Д., Таршис М.Ю. Основы оптимального и вероятностного проектирования элементов конструкций. Ярославль, 2001.- 387с.

THE OPTIMIZATION MODELS AT PROBABILITY DURABLE ACCOUNTS OF DESIGNS ELEMENTS

Tarshis Yu.D, Tarshis M.Yu.

Yaroslavl state technical university, Yaroslavl, Russia

The approaches to the decision of two kinds optimization tasks are examined in this article. The first task consists in maximization reliability of a design, device at restrictions of cost. Second consists in minimization of expenses at restrictions on probability of non-failure operation of a design or machine element. The tasks are reduced to definition conditional extremum of casual sizes of durability and loading function.